MARTIN GARDNER

AMUZAMENTE MATEMATICE

BUCUREȘTI
1968

EDITURA
ȘTIINȚIFICĂ

MARTIN GARDNER

First and Second Scientific American Books of Mathematical Puzzles and Diversians

Simon and Schuster, Inc.,
New York

ȘERBAN ANDRONESCU — Traducerea versurilor

LUDOVIC BARDOCZ — Supracoperta și coperta

INTRODUCERE

Elementul de joc, care face ca matematica recreativă să fie recreativă, poate lua diverse forme: o enigmă de rezolvat, un joc cu caracter competitiv, un truc magic, un paradox, o eroare logică sau, pur şi simplu, matematică cu unele trăsături curioase sau amuzante. Ce sînt aceste exemple: matematică pură sau aplicată? Greu de spus. Într-un sens, matematica recreativă este matematică pură, necontaminată de utilitate. Într-un alt sens, ea este matematică aplicată, deoarece satisface nevoia universal umană de distracţie.

Poate că această nevoie de distracţie se ascunde pînă şi în spatele matematicii pure. Nu este mare deosebire între plăcerea pe care o încearcă un novice atunci cînd descifrează o enigmă ingenioasă şi plăcerea pe care o încearcă un matematician atunci cînd reuşeşte să rezolve o problemă ridicată de ştiinţă. Ambele ţin de frumosul pur, de acea ordine limpede, net definită, misterioasă, fermecătoare, care se află la baza oricărei structuri. De aceea, nu trebuie să ne surprindă că este adesea greu să facem distincţie între matematica pură şi cea recreativă. De exemplu, teorema hărţii în patru culori este o importantă problemă nerezolvată a topologiei, deşi vom găsi discuţii asupra ei în numeroase volume recreative. Nimeni nu va tăgădui că flexagoanele de hîrtie, care formează subiectul primului capitol al acestei cărţi, sînt jucării extrem de amuzante; însă analiza structurii lor ne conduce într-un domeniu avansat al teoriei grupurilor, şi cele mai tehnice reviste de matematică au publicat articole despre flexagoane.

Matematicienilor creatori nu le este aproape niciodată ruşine de interesul lor pentru subiectele recreative. Topologia îşi are începutul în analiza făcută de Euler asupra unei enigme în care era vorba despre traversarea unor poduri. Leibniz a consacrat un timp considerabil studiului unui joc cu săritura calului, care s-a bucurat recent de o nouă întinerire sub numele de „Încercaţi-vă inteligenţa". Marele matematician german David Hilbert a demonstrat una din-

tre teoremele de bază în domeniul jocurilor de disecție. Defunctul A.M. Turing, un pionier în teoria automatelor de calcul moderne, s-a ocupat de discutarea jocului 15 al lui Sam Loyd (descris aici în cap. 9), într-un articol despre probleme rezolubile și irezolubile. Piet Hein (al cărui joc Hex formează subiectul capitolului 8) ne-a povestit că, atunci cînd l-a vizitat pe Albert Einstein, a găsit la acesta un întreg raft de cărți plin cu jocuri și enigme matematice. Interesul acestor minți luminate pentru jocul matematic nu este greu de înțeles, deoarece gîndirea creatoare care se dăruiește unor astfel de subiecte banale este de aceeași natură cu tipul de gîndire care conduce la descoperirea matematică și științifică. La urma urmelor, ce altceva este matematica decît o rezolvare de enigme? Și ce este știința, dacă nu un efort sistematic de a obține răspunsuri din ce în ce mai bune la enigmele pe care ni le pune natura?

Valoarea pedagogică a matematicii recreative este, în prezent, larg recunoscută. Constatăm că se pune din ce în ce mai mult accent pe ea în revistele publicate pentru profesorii de matematică și în manualele mai noi, în special în cele scrise din punct de vedere „modern". De exemplu, *Introducerea în matematica finită* a lui J.G. Kemeny, J. Laurie Snell și Gerald L. Thompson este înviorată de un bogat material recreativ. Aceste materii captivează interesul elevului. Profesorul de matematică din liceu, care dojenește doi elevi pentru că joacă pe sub bancă ticktacktoe[1] în loc să fie atenți la lecție, ar putea foarte bine să se întrerupă și să se întrebe: „Este oare acest joc mai interesant din punct de vedere matematic pentru elevii în cauză decît ceea ce le spun eu?" Într-adevăr, o discuție făcută în clasă despre jocul ticktacktoe nu este de loc o introducere proastă pentru mai multe capitole ale matematicii moderne.

Într-un articol despre *Psihologia maniei enigmistice* (publicat în „Nineteenth Century Magazine", decembrie, 1926), marele autor englez de jocuri matematice Henry Ernest Dudeney se plîngea de două lucruri. Literatura de matematică recreativă, spunea el, este plină de repetiții, iar lipsa unei bibliografii adecvate îi face pe entuziaști să piardă timp cu cercetarea unor probleme discutate cu mult înainte. Sînt fericit să anunț că nevoia unei astfel de bibliografii a fost, în sfîrșit, împlinită. Prof. William L. Schaaf, de la Brooklyn College, a întocmit o foarte bună listă comentată, cuprinzînd 143 de pagini și intitulată *Recreational Mathematics*, care poate fi obținută pentru 1,20 dolari de la Consiliul național al profesori-

[1] Vezi cap. 4, Cartea întîi.

lor de matematică, 1 201 Sixteenth Street, N.W., Washington 6, D.C. În 1958 a fost publicată o ediție revăzută. Cît privește al doilea motiv de nemulțumire al lui Dudeney, mi-e teamă că el se aplică și astăzi lucrărilor obișnuite din acest domeniu, inclusiv celei de față; cred însă că cititorii vor descoperi aici mai mult decît cantitatea uzuală de material proaspăt, care nu și-a mai găsit pînă acum loc între coperțile unei cărți.

Este pentru mine o plăcere să aduc mulțumiri lui Gerard Piel, editorul revistei „Scientific American", și redactorului ei, Dennis Flanagan, pentru privilegiul de a apărea în mod regulat în distinsa tovărășie a colaboratorilor lor și pentru permisiunea de a-mi retipări eforturile în prezentul volum. Sînt recunoscător, de asemenea, miilor de cititori din toate părțile lumii, care și-au dat osteneala de a-mi atrage atenția asupra unor greșeli (vai, foarte frecvente) și de a face sugestii valoroase. În unele cazuri, acestea au fost încorporate articolelor înseși, însă în majoritatea cazurilor ele sînt adunate laolaltă, la sfîrșitul fiecărui capitol, într-o anexă. Răspunsurile la probleme (acolo unde sînt necesare) sînt date tot la sfîrșitul capitolului.

Și trebuie neapărat să-i mulțumesc soției mele, nu numai pentru citirea competentă și extrem de îngrijită a corecturilor, ci și pentru răbdarea de care dă dovadă în acele grele momente ale meditației matematice în care nu aud ceea ce îmi spune.

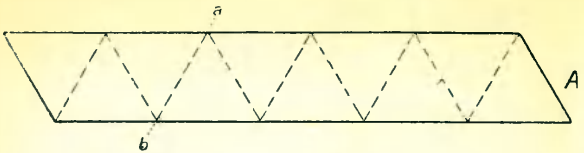
MARTIN GARDNER

Capitolul 1 HEXAFLEXAGOANE

Se numesc flexagoane acele poligoane de hîrtie, construite prin împăturirea unor fîşii de hîrtie drepte sau frînte, care au proprietatea fascinantă de a-şi schimba feţele, atunci cînd sînt împăturite în diverse feluri, „flexate". Dacă nu ar fi fost împrejurarea banală că formatul foilor la caietele de notiţe din Anglia şi din Statele Unite este diferit, flexagoanele ar fi fost, poate, pînă acum nedescoperite, iar numeroşi matematicieni de frunte ar fi fost lipsiţi de plăcerea de a analiza curioasele lor structuri.

Totul a început în toamna anului 1939. Arthur H. Stone, un absolvent de 23 de ani din Anglia, care se afla la Universitatea din Princeton ca bursier de matematică, tocmai tăiase din hîrtia de notiţe americană o fîşie lată de un ţol pentru ca să poată introduce foile în coperta sa de format englezesc. În joacă, el a început să îndoaie în fel şi chip fîşiile de hîrtie desprinse; una dintre figurile obţinute dovedindu-se deosebit de interesantă. El îndoise fîşia de hîrtie, după o linie diagonală, în trei locuri, şi reunise capetele, astfel încît să iasă un hexagon (fig. 1). Alăturînd două triunghiuri adiacente şi împingînd spre centru colţul opus al hexagonului, acesta s-a deschis din nou, ca un boboc de floare, prezentînd o faţă cu totul nouă. Dacă, de exemplu, faţa şi spatele hexagonului iniţial erau colorate diferit, noua faţă ieşea albă, iar una dintre feţele colorate dispărea!

Această structură, primul flexagon cunoscut, are trei feţe. Stone s-a gîndit la aceasta în timpul nopţii, iar a doua zi şi-a confirmat părerea (la care a ajuns prin simplă deducţie) că un model hexagonal mai complicat ar putea fi împăturit cu şase feţe, în loc de trei. Ajuns la acest punct, Stone a considerat structura atît de interesantă, încît a arătat modelele sale de hîrtie unor prieteni matematicieni. Curînd, „flexagoanele" au început să apară din abundenţă în timpul prînzului şi al cinei. A fost organizat un „Comitet de flexagoane", pentru a studia mai profund misterele flexărilor. În afară de Stone,



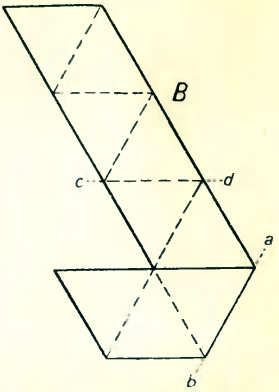
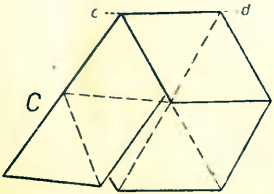
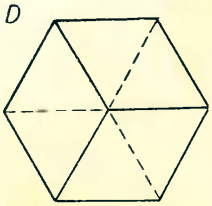


Fig. 1 Trihexaflexagonul se construiește, tăind o bandă de hîrtie astfel încît să poată fi desenate pe ea 10 triunghiuri echilaterale (*A*). Banda se îndoaie spre spate, în lungul liniei *ab*, și așezată ca în *B*. O îndoim apoi din nou spre spate, în lungul liniei *cd*, iar penultimul triunghi se petrece peste primul (*C*). Ultimul triunghi se îndoaie acum spre spate și se lipește de fața cealaltă a celui dintîi (*D*). Figura poate fi flexată așa cum se arată la p. 14 Se recomandă o hîrtie mai rigidă, latã de cel puțin 1,5 țoli.





membrii comitetului erau: Bryant Tuckerman, absolvent în matematică, Richard P. Feynman, absolvent în fizică, și John W. Tukey, un tînăr preparator de matematică.

Modelele au fost numite hexaflexagoane: „hexa", datorită formei lor hexagonale, și „flexagoane" pentru capacitatea lor de a fi împăturite în diferite feluri, flexate. Primul model al lui Stone este un trihexaflexagon („tri", pentru că se pot pune în evidență trei fețe); a doua sa structură elegantă este un hexahexaflexagon (pentru că are șase fețe).

Pentru a construi un hexahexaflexagon, se pornește de la o fîșie de hîrtie (banda de la mașinile de calculat este foarte bună), împărțită în 19 triunghiuri echilaterale (fig. 2). Se numerotează triunghiurile de pe o față a benzii de hîrtie cu cifrele 1, 2 și 3, lăsînd triunghiul al 19-lea alb, după cum se vede și în desen. Pe fața cealaltă, triunghiurile se numerotează cu 4, 5 și 6. Acum, se îndoaie fîșia în așa fel încît aceleași numere de pe fața de jos să vină unul peste altul: 4 peste 4, 5 peste 5, 6 peste 6 etc. Banda împăturită, astfel obținută, înfățișată în al doilea desen din serie, este apoi îndoită după

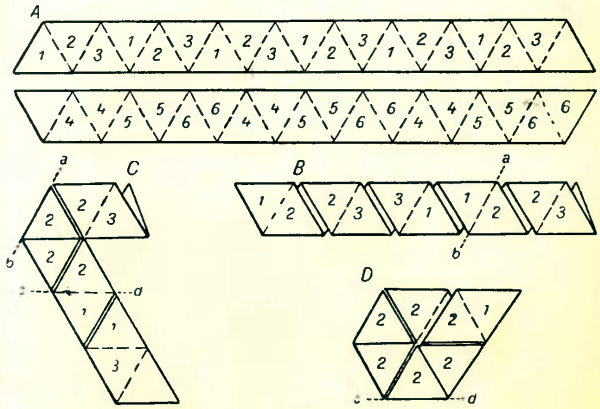


Fig. 2 Hexahexaflexagonul se construiește, tăind o bandă de hîrtie, astfel încît să poată fi împărțită în 19 triunghiuri (*A*). Triunghiurile de pe o față se numerotează cu *1*, *2* și *3*; triunghiurile de pe cealaltă, cu *4*, *5* și *6*. Se poate utiliza și o schemă asemănătoare de culori sau figuri geometrice. Hexagonul se pliază apoi ca în desen. Figura poate fi flexată încît să prezinte șase fețe diferite.

liniile *ab* şi *cd (al treilea desen)*, formînd hexagonul *(al patrulea desen)*; în sfîrşit, triunghiul alb este întors spre partea posterioară şi lipit peste triunghiul alb corespunzător de cealaltă parte a benzii de hîrtie. Toate acestea sînt mai uşor de efectuat cu fişia de hîrtie astfel numerotată, decît de descris prin cuvinte.

Dacă aţi făcut împăturirile cu precizie, triunghiurile de pe o faţă vizibilă a hexagonului sînt numerotate toate cu *1*, iar pe faţa cealaltă, toate cu *2*. Hexahexaflexagonul dv. este acum gata pentru flexări. Strîngeţi două triunghiuri adiacente unul peste altul (fig. 3), îndoind hîrtia după linia dintre ele şi împingeţi vîrful opus; figura se va deschide atunci, prezentînd faţa *3* sau *5*. Flexînd la întîmplare, veţi reuşi să găsiţi celelalte feţe, fără prea multă greutate. Feţele *4*, *5* şi *6* sînt ceva mai greu de dezvelit decît *1*, *2* şi *3*. Cîte-

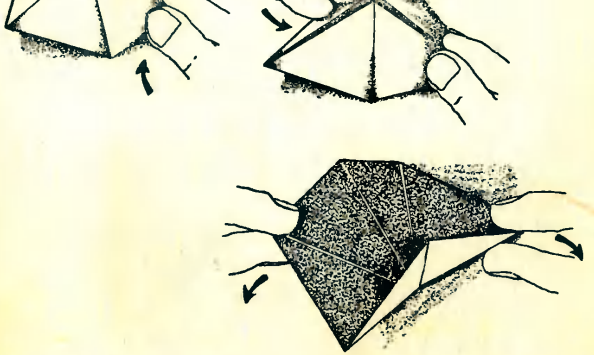


Fig. 3 Trihexaflexagonul se flexează, strîngînd împreună două dintre triunghiuri (sus). Muchia interioară a celor două triunghiuri opuse poate fi desfăcută cu mîna cealaltă (*jos*). Dacă figura nu poate fi desfăcută, perechea de triunghiuri adiacente se strînge între degete. Dacă figura se deschide, ea poate fi întoarsă cu partea interioară în afară, prezentînd o faţă invizibilă înainte.

odată puteți nimeri într-un circuit plicticos, care readuce mereu la suprafață aceleași trei fețe.

Tuckerman a descoperit repede că cea mai simplă cale pentru a scoate la iveală toate fețele unui flexagon constă în a continua să-l flexăm la același vîrf, pînă cînd refuză să se mai deschidă, și atunci trecem la vîrful următor. Acest procedeu, cunoscut sub denumirea de „parcursul Tuckerman", dezvăluie cele șase fețe ale unui hexahexa într-un ciclu de 12 flexări, însă *1*, *2* și *3* apar de trei ori mai frecvent decît *4*, *5* și *6*. O cale convenabilă de a reprezenta grafic un parcurs Tuckerman este dată în fig. 4, unde săgețile indică ordi-

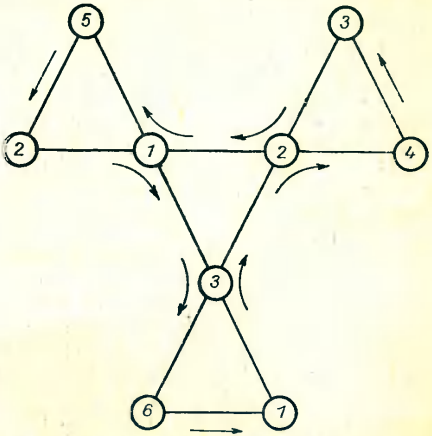


Fig. 4 Diagrama unui parcurs Tuckerman pentru hexahexaflexagon.

nea în care fețele devin vizibile. Acest tip de diagramă poate fi aplicat cu folos la parcurgerea oricărui tip de flexagon. Dacă modelul este inversat, există un parcurs Tuckerman, care efectuează același ciclu în ordine inversă.

Lungind lanțul de triunghiuri, comitetul a descoperit că se pot construi flexagoane cu 9, 12, 15 sau mai multe fețe: Tuckerman a reușit să obțină un model cu 48 de fețe! De asemenea, el a

constatat, că o bandă de hîrtie tăiată în zigzag (adică o fîşie care arată ca nişte dinţi de ferăstrău) poate da un tetrahexaflexagon (patru feţe) sau un pentahexaflexagon. Există trei hexahexaflexagoane diferite: unul împăturit dintr-o fîşie dreaptă, unul dintr-un lanţ împăturit într-un hexagon şi unul dintr-o figură care seamănă întrucîtva cu o frunză de trifoi. Decahexaflexagonul (10 feţe) are 82 de variante diferite, obţinute toate din fîşii de hîrtie împăturite în moduri stranii. Putem forma flexagoane cu orice număr de feţe, însă dacă numărul feţelor este mai mare de 10, speciile fiecăruia se înmulţesc cu o viteză alarmantă. În treacăt fie zis, toate flexagoanele cu număr par de feţe se obţin din fîşii cu două feţe distincte, însă cele cu număr impar au numai o singură faţă, cu o suprafaţă Moebius.

În 1940, Tukey şi Feynman au elaborat o teorie matematică completă a flexării. Printre altele, ea ne arată cu exactitate cum putem construi un flexagon de orice mărime sau specie dorită. Teoria nu a fost niciodată publicată, deşi anumite părţi ale ei au fost redescoperite de alţi matematicieni. Printre cei ce se ocupă de flexări este şi tatăl lui Tuckerman, distinsul fizician Louis D. Tuckerman, care a lucrat în trecut la Biroul naţional de standardizare. Tuckerman senior a obţinut pentru această teorie o diagramă-arbore simplă, dar eficientă.

Atacul de la Pearl Harbor a întrerupt programul de flexări al comitetului, războiul împrăştiindu-i curînd pe cei patru membri fondatori în toate părţile lumii. Stone este acum conferenţiar de matematică la Universitatea din Manchester (Anglia). Feynman, în prezent la Institutul tehnologic din California, a ajuns un celebru fizician teoretician. Tukey, profesor de matematică la Princeton, a adus strălucite contribuţii în topologie şi în statistică, datorită cărora este recunoscut în lumea întreagă. Tuckerman este un bine cunoscut matematician de la Institutul de înalte studii de la Princeton, unde lucrează la Departamentul de proiectare a calculatoarelor electronice.

Comitetul speră ca, în curînd, să publice un articol sau două cu expunerea definitivă a teoriei flexagonului. Pînă atunci, noi ceilalţi, avem toată libertatea să ne împăturim flexagoanele şi să vedem cît putem descoperi din această teorie prin propriile noastre puteri.

Cînd construim flexagoane din benzi de hîrtie, este bine ca, înainte de a porni la împăturirea modelului, să îndoim toate liniile înainte și înapoi. În acest fel, flexagonul se va împături mult mai ușor. Unii cititori au confecționat modele mai durabile, tăindu-și triunghiuri din cărți poștale sau din metal, reunindu-le prin bucăți mici de pînză, sau lipindu-le pe o fîșie lungă de pînză și lăsînd printre ele intervale pentru flexare. Louis Tuckerman dispune de o bandă de oțel, astfel dimensionată, încît încolăcind peste ea o fîșie de hîrtie de lățime determinată, el poate obține repede o fîșie cu îndoituri de tipul celei din fig. 2 B. Aceasta economisește un timp considerabil, cînd facem flexagoane din lanțuri liniare de triunghiuri.

De la diverși cititori mi-au parvenit o mare varietate de metode pentru a decora fețele flexagoanelor, astfel încît să rezulte jocuri interesante sau efecte vizuale pregnante. De exemplu, fiecare față a hexahexaflexagonului apare în cel puțin două forme diferite, datorită unei rotații a triunghiurilor componente unul față de altul. Astfel, dacă împărțim fiecare față ca în fig. 5, folosind culori diferite pentru porțiunile A, B și C, aceeași față poate să apară cu porțiunile A în centru, așa cum se vede în figură, sau cu porțiunile B

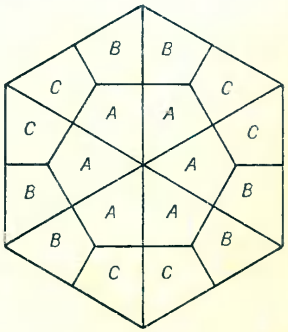


Fig. 5

Fig. 6

sau *C* în centru. Figura 6 arată cum putem desena un model geometric pe o față, astfel încît să apară în trei configurații diferite.

Dintre cele 18 fețe care pot să rezulte dintr-o rotație a triunghiurilor, trei sînt imposibil de obținut cu un hexahexa confecționat dintr-o fîșie dreaptă. Aceasta a sugerat unuia dintre corespondenții noștri gîndul de a lipi părți din trei imagini diferite pe fiecare față, astfel încît, printr-o flexare corectă a modelului, fiecare imagine să poată fi adusă, în principiu, în centru, în timp ce celelalte două vor apărea fragmentate în jurul marginii. Pe cele trei hexagoane interioare, care nu pot fi aduse unul lîngă celălalt, el a lipit trei porțiuni din trei imagini ale unor fete drăguțe, pentru a obține ceea ce a denumit un hexahexafrustragon. Un alt cititor, ne-a scris că a obținut rezultate similare, lipind împreună două fețe triunghiulare adiacente. În acest fel, în cadrul flexării, o față nu ajunge niciodată la vedere, deși ne putem da seama de existența ei, privind în interiorul modelului.

Afirmația conform căreia la hexahexaflexagonul dintr-o fîșie dreaptă sînt posibile numai 15 modele diferite necesită precizări. O colorare asimetrică a fețelor pune în evidență faptul curios că trei dintre aceste 15 modele au parteneri care sînt imaginile lor într-o oglindă. Dacă numerotați vîrfurile interioare ale fiecărui model cu cifrele 1—6, scriindu-le în sensul mersului acelor de ceasornic, veți constata că trei dintre aceste modele se transformă în altele, care au aceleași numere scrise în sens invers. Dacă ținem minte această asimetrie, putem spune că cele șase fețe ale respectivului hexahexaflexagon prezintă un total de 18 configurații dis-

tincte. Acest fapt ne-a fost adus la cunoştinţă pentru prima dată de către Albert Nicholas, profesor la Monmouth College, Monmouth, Illinois, unde confecţionarea flexagoanelor a devenit un fel de manie în primele luni ale anului 1957.

Nu se ştie precis cine a folosit pentru prima oară un flexagon tipărit pentru o reclamă sau pentru o felicitare. Cel dintîi care ne-a parvenit a fost un trihexaflexagon, distribuit de societatea Rust Engineering Company din Pittsburgh, ca invitaţie la un banchet în 1955. Un frumos hexahexa, proiectat astfel încît să prezinte o varietate de modele colorate ale unui fulg de zăpadă, a fost utilizat ca felicitare cu prilejul sărbătorilor de iarnă în 1956, de către revista „Scientific American".

Pentru cititorii care ar dori să construiască şi să analizeze alte flexagoane decît cele două descrise în acest capitol, dăm aici o rapidă trecere în revistă a unor variante de ordin mai mic.

1. Unahexa. O fîşie din trei triunghiuri poate fi împăturită, iar capetele opuse se reunesc pentru a forma o bandă Moebius cu muchie triunghiulară. (Pentru un model mai elegant de bandă Moebius cu muchie triunghiulară, vezi cap. 7.) Deoarece are numai o singură faţă, formată din şase triunghiuri, putem denumi figura unahexaflexagon, deşi, firește, nu are şase laturi şi nu se poate flexa.

2. Duahexa. Pur şi simplu, un hexagon decupat dintr-o bucată de hîrtie. Are două feţe, dar nu flexează.

3. Trihexa. Acesta are numai o singură formă, descrisă în capitolul de faţă.

4. Tetrahexa. Are tot numai o singură formă. Se împăturește din fîşia frîntă, reprezentată în fig. 7 *A*.

5. Pentahexa. O singură formă. Se împăturește dintr-o fîşie, ca aceea din fig. 7 *B*.

6. Hexahexa. Trei variante, fiecare cu proprietăţi unice. Una dintre ele este descrisă în acest capitol. Celelalte două se împăturesc din benzile desenate în fig. 7 *C*.

7. Heptahexa. Acesta se poate împături din cele trei fîşii reprezentate în fig. 7*D*. Prima fîşie poate fi împăturită în două moduri diferite, dînd în total patru variante. A treia formă, obţinută din fîşia suprapusă în formă de 8, este prima figură din seria denumită de Louis Tuckerman „flexagoane-stradă". Feţele sale pot fi astfel numerotate încît un parcurs Tuckerman să facă vizibile cele şapte

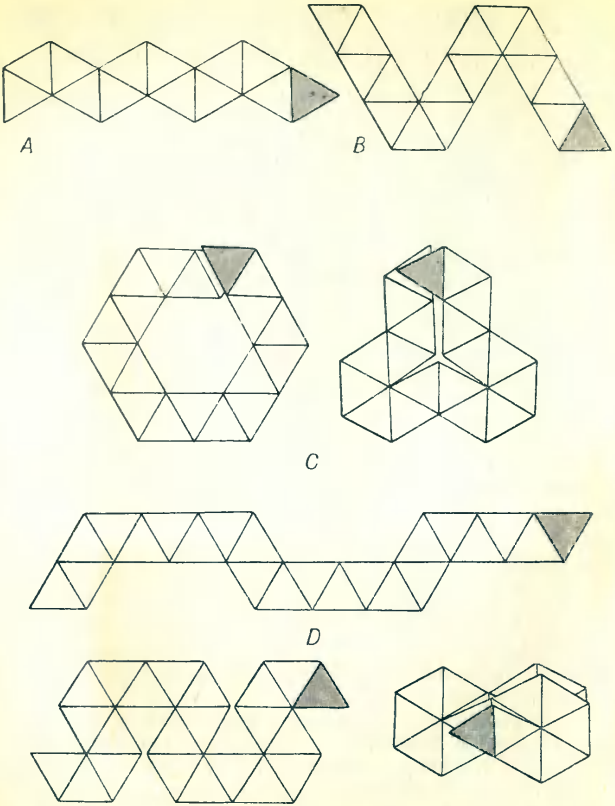


Fig. 7 Benzi îndoite pentru obținerea hexaflexagoanelor. Hașurările marchează triunghiurile care se lipesc la sfîrșit.

fețe, una după alta, ca și cum am trece pe lîngă numerele unui șir de case de pe o stradă.

Octahexaflexagonul are 12 variante distincte, enneahexaflexagonul are 27, iar decahexaflexagonul, 82 de variante distincte. Numărul exact al variantelor fiecărui ordin poate fi reprezentat în mai multe feluri, în funcție de modul în care definim ceea ce se cheamă o variantă distinctă. De exemplu, toate flexagoanele au o structură asimetrică, care poate fi dreaptă sau stîngă, însă formele-oglindire pot fi cu greu clasificate ca variante diferite. Referitor la numărul de hexaflexagoane neechivalente din fiecare ordin, se poate consulta articolul lui Oakley și Wisner

Cu lanțurile de triunghiuri rectilinii se pot realiza numai hexaflexagoane al căror ordin de mărime este un multiplu de trei. O variantă de hexa cu 12 fețe este deosebit de ușor de împăturit. Începeți un lanț rectiliniu, de două ori mai lung decît unul folosit pentru hexahexa. Flexați lanțul așa cum se arată în fig. 2 *B*. Banda are acum aceeași lungime cu a uneia folosite pentru hexahexa. Împăturiți această bandă exact ca și cum ați confecționa un hexahexa. Rezultatul: un dodecahexaflexagon.

În experimentările cu flexagoane de ordin mai mare, o regulă comodă, care trebuie ținută minte, este că suma numărului de foi (grosimea hîrtiei) în două secțiuni triunghiulare adiacente este întotdeauna egală cu numărul fețelor. Este interesant de notat și faptul că, dacă fiecare față a unui flexagon capătă un număr de ordine sau un simbol, iar simbolul este însemnat pe fiecare componentă triunghiulară, ordinea simbolurilor pe fișia neîmpăturită prezintă totdeauna o simetrie de ordinul 3. De exemplu, banda de hîrtie pentru hexahexaflexagonul din fig. 2 are următoarea schemă de numere pe față și pe spate:

123 123	123 123	123 123
445 566	445 566	445 566

O triplă diviziune, asemănătoare cu aceasta, este caracteristică pentru toate hexahexaflexagoanele, deși la modelele de ordin impar una dintre cele trei diviziuni este totdeauna inversată.

Dintre sutele de scrisori pe care le-am primit referitor la flexagoane, următoarele două sînt cele mai amuzante. Ele au apărut în „Scientific American", numerele din martie și mai 1957.

Domnilor,

Am fost de-a dreptul captivat de articolul Flexagoane *din numărul dv. pe luna decembrie. Ne-au trebuit doar şase sau şapte ore ca să lipim hexahexaflexagonul în configuraţia cuvenită. De atunci, aceasta a constituit pentru noi un izvor de permanentă uimire.*

Avem însă o problemă. Azi dimineaţă, unul dintre colegii noştri stătea fără treabă şi împăturea hexahexaflexagonul, cînd, deodată, capătul cravatei sale a fost prins într-o împăturire. Cu fiecare împăturire consecutivă, o parte tot mai mare din cravată dispărea în flexagon. O dată cu a şasea flexare, colegul a dispărut în întregime.

Am stat să flexăm jucăria pînă la nebunie, fără a reuşi să găsim vreo urmă a colegului nostru, însă am stabilit o a şaisprezecea configuraţie a hexahexaflexagonului.

Iată întrebarea noastră: este oare cazul ca văduva lui să primească o compensaţie pe timpul absenţei sale, sau putem de pe acum să-l declarăm legalmente decedat? În aşteptarea sfatului dv.,

NEIL UPTEGROVE

Allen B. Du Mont Laboratories, Inc.
Clifton, N.J.

Domnilor,

Scrisoarea din numărul pe martie al revistei dv., care se plîngea de dispariţia unui colaborator de la Allen B. Du Mont Laboratories, Inc. „înghiţit" de un hexahexaflexagon, a rezolvat pentru noi un mister.

Într-o zi, pe cînd ne treceam vremea flexînd ultimul nostru hexahexaflexagon, am rămas uluiţi, constatînd că el producea o fişie de material multicolor. Continuînd să-l flexăm, hexahexaflexagonul a dat la iveală, pînă la urmă, un necunoscut mestecînd gumă.

Din nefericire era foarte slăbit şi, din cauza unei evidente pierderi a memoriei, incapabil să ne explice cum ajunsese printre noi. I-am

refăcut sănătatea cu regimul nostru național de porridge, haggis[1] *și whisky, și el a devenit o mascotă a secției noastre căreia i s-a dat numele de Eccles.*

Întrebarea noastră: trebuie oare să-l restituim, și dacă da, în ce fel? Din nefericire, acum Eccles se ascunde deîndată ce vede un hexahexaflexagon și refuză cu desăvîrșire să „flexeze".

ROBERT M. HILL

The Royal College of Science and Technology
Glasgow, Scotland.

[1] *Porridge* — un fel de supă din cereale sau făină, preparată cu apă sau cu lapte, care face parte din dejunul tradițional englezesc.

Haggis — fel de mîncare scoțian, din bucăți de plămîn, inimă etc. de oaie sau de viței, cu seu, mirodenii și făină, care se fierbe în stomacul animalului.

Capitolul 2 „MAGIE" CU O MATRICE

Pătratele magice i-au intrigat pe matematicieni timp de peste 2 000 de ani. În forma tradițională, pătratul este construit în așa fel, încît numerele din fiecare linie, din fiecare coloană și din fiecare diagonală să dea același total. În fig. 8 însă, este reprezentat un pătrat magic de un tip cu totul diferit. Acest pătrat pare să nu aibă nici un sistem: numerele dau impresia că ar fi distribuite aleatoriu în matrice. Totuși, pătratul posedă o proprietate magică, tot atît de uimitoare pentru matematicieni, ca și pentru profani.

O modalitate convenabilă de a pune în evidență această proprietate constă în a vă aproviziona cu cinci monede mici și cu 20 de pătrățele mici, decupate din hîrtie. Cereți acum cuiva să aleagă un număr din pătrat. Așezați o monedă peste acest număr și eliminați toate celelalte numere din aceeași linie și din aceeași coloană, acoperindu-le cu hîrtioarele decupate.

Cereți partenerului să aleagă un al doilea număr, dintr-o celulă neacoperită. Ca și înainte, puneți o monedă peste acest număr și acoperiți-le pe toate celelalte din aceeași linie și din aceeași coloană. Repetați procedeul de încă două ori. Va rămîne o singură celulă neacoperită. Puneți aici a cincea monedă.

Adunînd cele cinci numere de sub monede, care în aparență au fost alese la nimereală, veți obține neapărat suma 57. Nu este o întîmplare. Totalul va rămîne același, la orice reluare a experimentului.

Dacă vă place să rezolvați enigme matematice, puteți să vă opriți la acest punct, pentru a analiza pătratul și a vedea dacă sînteți în stare să-i descoperiți singuri secretul.

Ca cele mai multe trucuri, și acesta este absurd de simplu, după ce a fost explicat. Acest pătrat nu este altceva decît un tabel de adunare de modă veche, aranjat într-un mod mai încurcat. Tabelul este generat de două mulțimi de numere: 12, 1, 4, 18, 0 și 7, 0, 4,

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Fig. 8

9, 2. Suma acestor numere este 57. Dacă scrieți prima mulțime de numere orizontal, deasupra liniei de sus a pătratului, iar a doua mulțime vertical, alături de prima coloană din stînga (fig. 9), vă puteți da seama dintr-o dată cum sînt aranjate numerele în celule. Numărul din prima celulă (linia întîi, coloana întîi) este suma lui 12 cu 7, și așa mai departe, pînă se epuizează tot pătratul.

Puteți construi un pătrat magic de acest gen, de orice mărime dorită și cu orice combinație de numere pe care le alegeți. Nu contează, cîtuși de puțin, cîte celule conține pătratul și nici ce numere ați utilizat pentru a-l genera. Numerele pot fi pozitive sau negative, întregi sau fracționare, raționale sau iraționale. Tabelul rezultat

	12	1	4	18	0
7	19	8	11	25	7
0	12	1	4	18	0
4	16	5	8	22	4
9	21	10	13	27	9
2	14	3	6	20	2

Fig. 9

se va bucura totdeauna de proprietatea magică de a impune un număr anumit prin procedeul descris, şi acest număr va fi totdeauna suma celor două mulţimi de numere generatoare ale tabelului. În cazul dat aici, puteţi descompune numărul 57 în opt numere arbitrare, a căror sumă este 57.

Principiul care stă la baza trucului se vede acum uşor. Orice număr din pătrat reprezintă suma unei perechi de numere din cele două mulţimi generatoare. Această pereche particulară este eliminată atunci cînd moneda este aşezată peste numărul respectiv. Procedeul impune fiecărei monede să se situeze într-o coloană diferită şi într-o linie diferită. Astfel, cele cinci monede acoperă sumele a cinci perechi diferite dintre cele zece numere generatoare, ceea ce este totuna cu suma celor zece numere.

Una dintre metodele cele mai simple de a construi un tabel de adunare pe o matrice pătrată constă în a porni de la numărul 1 în colţul din stînga sus, continuînd apoi de la stînga spre dreapta cu înşirarea întregilor în ordine naturală. O matrice de 4 x 4 de acest fel devine un tabel de adunare pentru cele două mulţimi de numere 1, 2, 3, 4 şi 0, 4, 8, 12 (fig. 10). Această matrice va da totdeauna numărul 34.

Natural, numărul impus este în funcţie de mărimea pătratului. Dacă numărul de celule pe o latură este n, atunci numărul impus va fi:

$$\frac{n^3 + n}{2}.$$

Fig. 10

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Pentru pătratele cu număr impar de celule pe o latură, acest număr impus va fi egal cu produsul dintre n și numărul din celula centrală.

Dacă porniți de la un număr mai mare decît 1 (să zicem a) și continuați în ordinea naturală, numărul impus va fi:

$$\frac{n^3+n}{2}+n(a-1).$$

Interesant de remarcat că numărul impus este egal cu totalul fiecărei linii și fiecărei coloane dintr-un pătrat magic tradițional, format din aceleași elemente numerice.

Cu ajutorul celei de-a doua formule, calculăm ușor numărul inițial al unei matrici de orice mărime dorită, care va impune orice număr dorit. Un tur de forță impresionant constă în a cere cuiva să vă spună un număr mai mare de 30 (aceasta pentru a evita apariția supărătoare a unor numere negative în matrice), după care procedați la construirea rapidă a unei matrice de 4×4 care să impună acest număr. (În loc să folosească monede, puteți recurge la procedeul mai rapid de a cere partenerului să încercuiască fiecare număr ales, tăind apoi cu creionul linia și coloana corespunzătoare.)

Singurul calcul pe care trebuie să-l efectuați (puteți să-l faceți mintal) constă în a scădea 30 din numărul care vi se spune și a-l împărți apoi cu 4. De exemplu, partenerul spune 43. Scăzînd 30, obțineți 13. Împărțind 13 la 4, rezultă $3\frac{1}{4}$. Așezînd acest număr

		$3\frac{1}{4}$	

Fig. 11

$16\frac{1}{4}$	$18\frac{1}{4}$	$15\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{4}$
$8\frac{1}{4}$	$10\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{4}$
$4\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$
$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{4}$	$11\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{4}$

Fig. 12

în prima celulă a unei matrice de 4×4 și continuînd apoi în ordine naturală cu $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{4}$, . . . , veți obține un total magic care impune totalul 43.

Pentru a face pătratul mai încîlcit, ordinea numerelor trebuie amestecată. De exemplu, puteți pune primul număr, $3\frac{1}{4}$, într-o celulă din linia a treia, așa cum se arată în fig. 11, iar următoarele trei numere $\left(4\frac{1}{4},\ 5\frac{1}{4}\right.$ și $\left.6\frac{1}{4}\right)$ într-o ordine întîmplătoare, în aceeași linie. Puteți scrie următoarele patru numere într-o altă linie (indiferent care), dar ele trebuie să se înșiruie la fel în celule ca și înainte. Procedați exact în același mod cu ultimele două linii. Rezultatul final va fi în genul celui ilustrat în fig. 12.

Dacă vreți să evitați fracțiile, impunînd totuși numărul 43, puteți omite $\frac{1}{4}$ la fiecare număr, adăugînd apoi cîte o unitate la fiecare dintre cele patru numere întregi mai mari, adică transformîndu-le în 16, 17, 18 și 19. Tot astfel, veți adăuga 2 la aceste numere dacă fracțiile au fost 2/4, sau 3 dacă au fost 3/4.

Schimbarea ordinii liniilor sau a coloanelor nu are nici un efect asupra proprietății magice a pătratului, iar încurcînd celulele în acest mod, faceți ca matricea să pară mult mai misterioasă decît este în fapt.

Tabelele de înmulțire pot fi și ele utilizate pentru a impune un număr. În acest caz, numerele alese trebuie înmulțite, nu adunate. Produsul final va fi egal cu produsul numerelor folosite la generarea tabelului.

Nu am reușit să descopăr cine a aplicat primul la trucuri această frumoasă proprietate a tabelelor de adunare și de înmulțire. Un joc cu cartoane numerotate, bazat pe acest principiu, a fost publicat de Maurice Kraitchik în cartea sa *Mathematical Recreations*, 1942, p. 184. Este cea mai veche referire la acest principiu, pe care am putut-o găsi. După 1942, mai mulți scamatori cu înclinații matematice au introdus variații pe această temă. De exemplu, Mel Stover din Winnipeg a observat că, dacă desenăm un pătrat care să cuprindă 16 numere dintr-o pagină de calendar, pătratul formează un tabel de adunare care impune un număr egal cu dublul sumei celor două numere de la capetele fiecărei diagonale.

Utilizarea cărților de joc deschide, și ea, posibilități foarte variate. De exemplu, este oare posibil să așezăm un pachet de cărți de joc astfel încît, după ce au fost tăiate, să formeze o arie pătrată de cărți de joc, în așa fel încît să impună totdeauna același număr? Principiul este relativ necercetat și poate avea numeroase ramificări curioase, care urmează să fie descoperite.

ADAOS

Stewart James, un scamator din Courtright, Ontario, a inventat o nouă variantă de matrice magică, în care putem impune unui public orice cuvînt dorim. Să presupunem că vreți să impuneți cuvîntul JAMES. Formați un pătrat din 25 cartoane, a căror parte întoarsă (pe care nu o cunoaște nimeni în afară de dv.) poartă literele

JAMES
JAMES
JAMES
JAMES
JAMES

Cereți cuiva să aleagă un carton, atingîndu-i spatele. Acest carton este pus deoparte, fără a i se arăta fața, iar toate celelalte cartoane din aceeași linie și din aceeași coloană sînt eliminate. Procedeul se

mai repetă de trei ori. apoi unicul carton rămas este aşezat împreună cu cele cinci alese anterior. Cele cinci cartoane sînt apoi întoarse cu faţa în sus şi aşezate în aşa fel, încît să dea cuvîntul JAMES. Natural, datorită acestui procedeu este imposibil ca cele cinci cartoane alese să cuprindă duplicate.

Un cititor ne-a scris că pătratele magice sînt, după cum a constatat, o curiozitate interesantă, care poate fi trimisă ca felicitare de ziua naşterii unor prieteni cu înclinaţii matematice. Primitorul urmează anumite instrucţiuni, adună numerele alese şi rămîne uluit cînd vede că totalul este egal cu vîrsta sa.

1. EXPLORATORUL CARE REVINE ÎN ACELAȘI LOC

O veche ghicitoare sună astfel: Un explorator merge o milă exact spre sud, își schimbă direcția și merge o milă exact spre est, își schimbă iarăși direcția și merge o milă exact spre nord. El reajunge în punctul de unde a pornit. Aici împușcă un urs. Ce culoare are ursul? Răspunsul consacrat este: „alb", deoarece exploratorul trebuie să fi pornit de la Polul Nord. De curînd însă, cineva a descoperit că Polul Nord nu este unicul punct de plecare care satisface condițiile date! Cunoașteți vreun alt loc de pe glob din care să putem merge o milă spre sud, o milă spre est, o milă spre nord și să ne regăsim în locul inițial?

2. DRAW POKER[1]

Doi oameni joacă draw poker, în următoarea manieră stranie. Ei așază un pachet de 52 de cărți cu fața în sus pe masă, așa încît să poată vedea toate cărțile. Primul jucător își alege cinci cărți. Al doilea procedează la fel. Primul jucător poate acum să-și păstreze cărțile inițiale sau să schimbe pînă la cinci cărți. Cele eliminate sînt puse de o parte și ies din joc. Al doilea jucător are acum, și el, același drept. Cel care are cărțile cele mai mari, cîștigă. Culorile au toate valoare egală, astfel încît două chinte devin decisive abia atunci cînd una este formată din cărți mai mari. După un timp, cei doi descoperă că primul jucător poate oricînd să cîștige, dacă își extrage corect primele cărți. Care trebuie să fie acestea?

[1] Draw poker este o variantă a pokerului care se joacă cu reintroducerea în pachet a cărților eliminate.

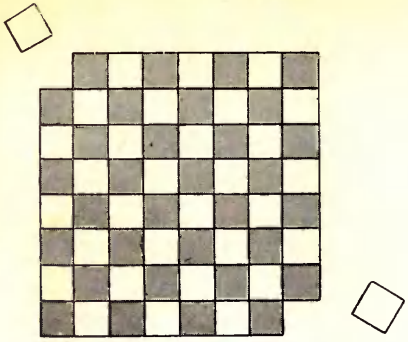


Fig. 13 Tabla de şah mutilată.

3. TABLA DE ŞAH MUTILATĂ

Baza acestei probleme o formează o tablă de şah şi 32 de piese de domino. Fiecare piesă este destul de mare pentru a acoperi exact două pătrate adiacente ale tablei. De aceea, cele 32 de piese de domino pot acoperi toate cele 64 de pătrăţele ale tablei. Să presupunem însă acum că îndepărtăm două pătrăţele de la extremităţile unei diagonale a tablei (fig. 13) şi punem deoparte una dintre piesele de domino. Este oare posibil să aşezăm cele 31 de piese de domino pe tablă, astfel încît toate cele 62 de pătrăţele rămase să fie acoperite? Dacă da, arătaţi în ce fel se poate face. Dacă nu, demonstraţi imposibilitatea.

4. BIFURCAŢIA

Iată o variantă recentă a unui tip vechi de enigmă logică. Un logician care-şi petrecea concediul în Mările Sudului nimereşte într-o insulă locuită de două triburi proverbiale: cei mincinoşi şi cei care spun numai adevărul. Membrii unui trib mint totdeauna,

membrii celui de-al doilea trib spun totdeauna adevărul. Logicianul ajunge la o bifurcație a drumului și trebuie să-l întrebe pe un băștinaș, ce cale să urmeze pentru a ajunge la un sat. El nu are nici o posibilitate de a ști dacă băștinașul spune adevărul sau dacă este mincinos. El se gîndește o clipă, după care pune *o singură* întrebare. Din răspuns, el află pe ce drum să apuce. Care este întrebarea?

5. CUTIILE CU ETICHETE ÎNCURCATE

Închipuiți-vă că aveți trei cutii, una cu două bile negre, una cu două bile albe, și a treia conținînd o bilă albă și una neagră. Cutiile au fost etichetate potrivit conținutului cu *NN*, *AA* și *NA*, însă cineva a schimbat între ele etichetele, în așa fel încît nu se mai potrivesc cu conținutul niei unei cutii. Aveți voie să extrageți cîte o singură bilă o dată din orice cutie, fără a privi înăuntru, iar prin acest procedeu de extragere selectivă, trebuie să determinați conținutul tuturor celor trei cutii. Care este cel mai mic număr de extracții necesar pentru a obține rezultatul?

6. BRONX CONTRA BROOKLYN

Un tînăr locuiește în Manhattan, în apropierea unei stații de metro. El are două prietene, una în Brooklyn și una în Bronx. Pentru a o vizita pe fata din Brooklyn, el ia metroul care pornește de la peron spre partea de jos a orașului; pentru a o vizita pe fata din Bronx, el ia, de la același peron, un metro spre partea de sus a orașului. Dat fiind că ambele fete îi plac la fel de mult, el ia, pur și simplu, primul tren. Astfel el lasă hazardul să hotărască dacă se va duce în Bronx sau în Brooklyn. Tînărul ajunge la peronul metroului la un moment oarecare în fiecare sîmbătă după masă. Metrourile spre Brooklyn și spre Bronx intră în stație cu aceeași frecvență: la fiecare 10 min. Dar, dintr-un motiv neînțeles, el constată că petrece cea mai mare parte a timpului cu fata din Brooklyn: în adevăr, în medie el merge acolo de nouă ori din zece. Puteți imagina un motiv valabil pentru care soarta favorizează atît de mult Brooklynul?

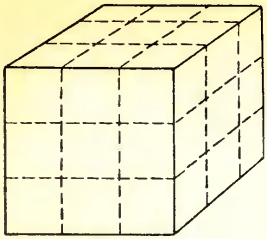


Fig. 14 Cubul sectionat

7. SECȚIONAREA CUBULUI

Un tîmplar, care lucrează cu un ferăstrău, vrea să taie un cub de lemn cu latura de trei țoli în 27 de cuburi de cîte un țol. El poate realiza aceasta cu ușurință, efectuînd 6 tăieturi prin cub, păstrînd piesele laolaltă, în formă de cub (fig. 14). Poate el oare să reducă numărul de tăieturi necesare prin rearanjarea bucăților, după fiecare secționare?

8. NAVETISTUL CARE A SOSIT PREA DEVREME

Un navetist are obiceiul să ajungă la stația sa suburbană în fiecare după-amiază, exact la ora 5. Soția îl așteaptă totdeauna la tren și-l duce acasă cu mașina. Într-o zi, el ia trenul mai devreme și ajunge în stație la ora 4. E timp frumos și, de aceea, în loc să telefoneze acasă, el pornește pe jos, pe drumul pe care vine totdeauna soția sa. Ei se întîlnesc undeva pe drum. Se urcă în mașină și o pornesc spre casă, ajungînd cu 10 min mai devreme decît de obicei. Presupunînd că soția merge totdeauna cu aceeași viteză și că, de această dată, ea a pornit de acasă exact la timp ca să ajungă la trenul de ora 5, puteți stabili cît timp a mers soțul pe jos înainte de a fi fost luat în mașină?

Fig. 15 Monedele false

9. MONEDELE FALSE

În ultimii ani un mare număr de probleme cu măsurarea unor monede sau a unor bile au trezit un interes larg. Iată aici o variantă nouă şi fermecător de simplă. Aveţi 10 fişicuri de monede de cîte o jumătate de dolar (fig. 15). Un fişic este format în întregime din monede false, dar nu ştiţi care anume. Cunoaşteţi greutatea unei jumătăţi de dolar autentice şi mai ştiţi că fiecare monedă contrafăcută cîntăreşte cu un gram mai mult decît trebuie. Puteţi cîntări monedele pe o balanţă automată. Care este cel mai mic număr de cîntăriri necesar pentru a determina fişicul falsificat?

RĂSPUNSURI

1. Există oare un punct pe glob, în afară de Polul Nord, din care puteţi merge o milă spre sud, o milă spre est şi o milă spre nord, ca să ajungeţi în punctul de pornire? Da, în adevăr; nu un singur punct, ci o infinitate! Puteţi porni din orice punct situat pe un cerc din jurul Polului Sud, descris la o distanţă ceva mai mare de $1 + 1/2\pi$ mile (aproximativ 1,16 mile) de la pol, distanţa fiind „ceva mai mare“ pentru a ţine seama de curbura Pămîntului. După ce veţi merge o milă spre sud, mergeţi o milă spre est descriind astfel un cerc complet în jurul polului, iar mergînd o milă spre nord, veţi reveni la punctul de plecare. Astfel, punctul de pornire poate fi unul din infinitatea de puncte ale cercului cu raza de aproximativ 1,16 mile, descris din Polul Sud. Dar nu numai atît. Puteţi

porni, de asemenea, din puncte mai apropiate de pol, astfel încît, mergînd spre est, să ocoliți polul de două ori, sau de trei ori etc.

2. Există 88 de combinații cîștigătoare. Ele se împart în două categorii: (1) 4 decari și altă carte oarecare (48 de combinații), (2) trei decari și oricare din următoarele perechi cu altă culoare decît a decarilor: A — 9, K—9, D—9, V—9, K—8, D—8, V—8, D—7, V—7, V—6 (40 de combinații). Asupra celei de-a doua categorii ne-au atras atenția doi cititori: Charles C. Foster din Princeton, New Jersey, și Christine A. Peipers din New York. Aceste combinații nu le-am mai văzut niciodată înainte incluse într-un răspuns publicat la această problemă.

3. Este imposibil să acoperim tabla de șah mutilată (din care s-au tăiat pătrățelele de la două colțuri opuse) cu 31 de piese de domino, iar demonstrația este ușoară. Cele două capete opuse ale diagonalei au aceeași culoare. De aceea, eliminarea lor ne dă o tablă cu două pătrățele mai mult dintr-o culoare decît din cealaltă. Fiecare piesă de domino acoperă două pătrate de culori opuse, căci numai culorile opuse sînt adiacente. După ce ați acoperit 60 de pătrățele cu 30 de piese de domino, vă rămîn două pătrățele neacoperite de aceeași culoare. Acestea două nu pot fi adiacente, deci nu pot fi acoperite de ultima piesă de domino.

4. Dacă cerem ca răspunsul la întrebare să fie „da" sau „nu", există mai multe soluții, care exploatează, toate, același truc de bază. De exemplu, logicianul arată cu degetul un drum și-i spune băștinașului: „Dacă te-aș întreba dacă acest drum duce la sat, ai răspunde „da"? Băștinașul este nevoit să dea răspunsul corect, chiar dacă este mincinos! Dacă drumul duce spre sat, mincinosul ar răspunde „nu" la întrebarea directă, dar, așa cum e pusă întrebarea, el minte și spune că ar răspunde „da". Astfel, logicianul poate fi sigur că drumul duce spre sat, indiferent dacă cel ce răspunde spune adevărul sau minte. Pe de altă parte, dacă drumul nu duce spre sat, mincinosul este forțat, în același mod, să răspundă „nu".

O întrebare similară ar fi: „Dacă l-aș întreba pe un membru al celuilalt trib dacă acest drum duce spre sat, ar răspunde „da"? Pentru a evita neclaritatea care rezultă dintr-o întrebare într-o întrebare, este, poate, mai bună următoarea formulare (sugerată de Warren C. Haggstrom din Ann Arbor, Michigan): „Dintre cele două propoziții: „Ești un mincinos" și „Acest drum duce spre sat", este una și numai una care să fie adevărată?" Aici iarăși, răspunsul „da" indică drumul, iar răspunsul „nu" arată că nu este drumul cel bun, indiferent dacă băștinașul spune adevărul sau minte.

Dennis Sciama, cosmolog la Universitatea Cambridge, și John McCarthy din Hanover, New Hampshire, mi-au atras atenția asupra unei frumoase variante adiționale a problemei. McCarthy scrie (într-o scrisoare publicată în „Scientific American", aprilie, 1957): „Să presupunem că logicianul știe că *«pish»* și *«tush»* sînt cele două cuvinte ale indigenilor pentru «da» și «nu», dar a uitat ce înseamnă fiecare dintre ele, deși cunoaște de altfel limba băștinașilor. El poate totuși să determine ce drum duce spre sat.

El arată cu degetul unul din drumuri și întreabă: «Dacă te-aș întreba dacă drumul indicat de mine este cel care duce spre sat mi-ai răspunde pish?» Dacă băștinașul răspunde *«pish»*, logicianul poate trage concluzia că drumul arătat de el este cel care duce spre sat, chiar dacă el nu știe dacă are de-a face cu un mincinos sau cu unul care spune adevărul și dacă *«pish»* înseamnă da sau nu. Dacă băștinașul răspunde *«tush»*, el poate trage concluzia opusă".

H. Janzen de la Universitatea Queens, Kingston, Ontario, și mai mulți alți cititori m-au informat că, dacă răspunsul băștinașului nu trebuie să fie „da" sau „nu", există o întrebare care află drumul corect, indiferent de numărul drumurilor care se întîlnesc la intersecție. Logicianul arată spre toate drumurile, inclusiv cel pe care a venit, și întreabă: „Care dintre aceste drumuri duce spre sat?" Cel care spune adevărul indică drumul corect, iar mincinosul, trebuie să presupunem, le indică pe toate celelalte. Logicianul ar mai putea să întrebe: „Care drum nu duce spre sat?" În acest caz, se poate presupune că mincinosul ar arăta unicul drum corect. Ambele cazuri sînt însă oarecum suspecte. În primul caz, mincinosul ar putea să indice numai un singur drum incorect, iar în al doilea caz el ar putea indica mai multe drumuri. Aceste răspunsuri ar fi minciuni într-un sens, deși nu ar fi cea mai mare minciună posibilă, iar celelalte ar conține o parte de adevăr.

Întrebarea referitoare la precizia cu care definim „minciuna" intră, bineînțeles, și ea, în soluțiile „da" și „nu" de mai sus. Nu găsesc o cale mai bună pentru a lămuri aceasta decît citînd în întregime următoarea scrisoare, primită de revista „Scientific American" de la Willison Crichton și Donald E. Lamphiear, ambii din Ann Arbor, Michigan.

Este un comentariu trist referitor la avîntul logicii, faptul că ea conduce la decăderea artei de a minți. Chiar printre mincinoși, viața rațiunii pare să cîștige teren față de o viață mai bună. Ne referim la enigma nr. 4 din numărul pe februarie și la soluția ei. Dacă acceptăm

soluția propusă, sîntem nevoiți să credem că mincinoșii pot fi făcuți totdeauna să ajungă victima înșelăciunii propriilor lor principii, o situație care, în adevăr, trebuie să apară ori de cîte ori minciuna ia forma unei dependențe servile față de reguli arbitrare.

Pentru antropolog, faptul de a-i spune băștinașului „Dacă te-aș întreba dacă acest drum duce la sat mi-ai răspunde „da"?, așteptînd ca el să interpreteze întrebarea ca pe o condiționare contrafactuală în înțeles, ca și în formă, presupune o anumită prețiozitate din partea băștinașului. Dacă antropologul pune întrebarea în mod condiționat, este aproape sigur că băștinașul va înțelege greșit această frazeologie stranie, luînd-o drept o formă de politețe în maniera democrațiilor occidentale și va răspunde pur și simplu ca și cum i s-ar fi pus întrebarea: „Acest drum duce spre sat?" Pe de altă parte, dacă antropologul se uită la băștinaș cu ochi strălucitori, pentru a accentua conținutul logic al întrebării, el își dă pe față scopul, făcînd să apară la băștinaș suspiciunea că este tras pe sfoară. Băștinașul, dacă-și merită numele de mincinos, va urma o metodă de contraînșelătorie, dezinformîndu-l pe antropolog. Din acest din urmă punct de vedere, soluția propusă este inadecvată, dar și în terminologia mințitului strict formal, ea păcătuiește prin ambiguitate.

Cercetarea soluțiilor neambigue ne conduce la o analiză mai amănunțită a naturii mințitului. Definiția tradițională, folosită de logicieni, constă în aceea că un mincinos este cineva care spune totdeauna ceea ce este fals. Ambiguitatea acestei definiții iese la iveală cînd încercăm să prevedem ce va răspunde un mincinos la o întrebare care este o funcție de adevăr compusă, cum ar fi „Este adevărat că, dacă acesta este drumul spre oraș, d-ta ești un mincinos?" Va evalua el corect cele două componente pentru a evalua funcția și-și va inversa evaluarea în ceea ce spune, sau va urma politica imparțială de a se minți pe sine ca și pe ceilalți, inversînd evaluarea fiecărei componente, înainte de a calcula valoarea funcției, și inversînd apoi valoarea calculată a funcției? Aici putem face distincție între mincinosul pur și simplu, *care spune totdeauna ceea ce este pur și simplu fals, și* mincinosul onest, *care spune totdeauna dualul logic al adevărului.*

Întrebarea: „Este adevărat că dacă acest drum duce spre oraș, d-ta ești un mincinos?" este o soluție, dacă mincinoșii noștri sînt onești. Mincinosul onest și cel ce spune adevărul răspund ambii „da", dacă drumul indicat nu este cel spre oraș, și „nu", dacă este. Dimpotrivă, mincinosul pur și simplu va răspunde „nu", indiferent

unde se află satul. Substituind echivalența pentru implicație, obținem o soluție care funcționează atît pentru mincinosul pur și simplu, cît și pentru cel onest. Întrebarea devine: „Este adevărat că acesta este drumul spre oraș, dacă și numai dacă d-ta ești un mincinos?" Răspunsul este uniform „nu", dacă drumul este cel bun, și „da", dacă nu este.

Dar nu ne putem aștepta de la nici un sălbatic primitiv mincinos să desfășoare scrupuloasa consistență cerută de aceste concepții, și nici un mincinos capabil de o astfel de agerime nu se va lăsa atît de ușor dus de nas. De aceea, trebuie să considerăm cazul mincinosului artist, *al cărui principiu este de a dezamăgi totdeauna. Față de un astfel de oponent, antropologul poate spera doar să maximizeze probabilitatea unui rezultat favorabil. Nici o întrebare logică nu poate fi o soluție infailibilă, deoarece dacă principiul mincinosului constă în a dezamăgi, el va replica printr-o strategie de decepționare, care ocolește logica. Evident, trăsătura esențială a strategiei antropologului trebuie să fie bunul-simț psihologic. O astfel de strategie este admisibilă, chiar dacă este mai eficientă față de mincinosul onest și față de cel simplu decît față de mincinosul artist care este mai refractar.*

De aceea, propunem ca soluție generală următoarea întrebare sau echivalentul ei moral: „Știi cumva dacă servesc bere de butoi în sat?" Cel ce spune adevărul răspunde „nu", și pornește imediat spre sat, urmat de antropolog. Mincinosul pur și simplu și cel onest răspund „da", și pornesc spre sat. Mincinosul artist, făcînd presupunerea politicoasă că antropologul umblă și el cu șmecherii, își alege strategia în mod corespunzător. Pus față în față cu două motive contrare, el poate alege șansa de a le satisface pe amîndouă, răspunzînd „Pfu! Am oroare de bere!" și pornind spre sat. Aceasta nu va induce în eroare pe un bun atropolog. Dacă însă mincinosul întrevede șiretlicul, el își va da seama de inadecvarea răspunsului său. În acest caz, el poate aduce supremul sacrificiu pe altarul artei, îndreptîndu-se pe drumul cel greșit. El înregistrează o victorie tehnică, dar și atunci antropologul se poate mîndri cu o victorie morală, deoarece mincinosul este pedepsit prin bănuiala supărătoare că a ratat berea.

5. Puteți afla conținutul tuturor celor trei cutii, extrăgînd o singură bilă. Cheia soluției constă în a ști că etichetele tuturor celor trei cutii sînt incorecte. Trebuie să extrageți o bilă din cutia etichetată „negru-alb". Să presupunem că bila extrasă este neagră. Știți că cealaltă bilă din această cutie trebuie să fie tot neagră,

căci altminteri eticheta ar fi corectă. Deoarece ați identificat acum cutia cu două bile negre, puteți spune imediat ce conține cutia marcată „alb-alb": știți că ea nu poate conține două bile albe, deoarece eticheta ei trebuie să fie falsă; ea nu poate conține două bile negre, deoarece această cutie ați identificat-o; de aceea, ea trebuie să conțină o bilă neagră și una albă. Natural, a treia cutie va trebui atunci să fie cea cu două bile albe. Puteți rezolva enigma prin același raționament, dacă se întîmplă ca bila extrasă din cutia „negru-alb" să fie albă, și nu neagră.

6. Răspunsul la această problemă este o simplă chestiune de mers al metroului. Dat fiind că metrourile de Brooklyn și de Bronx ajung la fel de frecvent — la intervale de cîte 10 min — se poate întîmpla ca orarul lor să fie astfel încît metroul de Bronx sosește totdeauna la acest peron cu 1 min după metroul de Brooklyn. Astfel, metroul de Bronx va sosi primul numai în cazul cînd se întîmplă ca tînărul nostru să ajungă la stația de metrou în acest interval de 1 min. Dacă el intră în stație la orice alt moment — adică în intervalul de 9 min — trenul de Brooklyn va fi cel care sosește primul. Dat fiind că sosirea tînărului este întîmplătoare, șansa este de 9 la 1 pentru Brooklyn.

7. Nu există nici o modalitate de a reduce numărul tăieturilor la mai puțin decît șase. Faptul devine imediat evident, dacă țineți seama că un cub are șase fețe. Ferăstrăul taie rectiliniu, fiecare față o dată. Pentru a obține cubul de un țol din mijloc (singurul care nu are o suprafață exterioară de la care să se poată începe) este nevoie de șase aplicări ale ferăstrăului.

Această problemă a fost imaginată de Frank Hawthorne, inspector al educației matematice, de la Departamentul de Stat al Educației, Albany, New York și publicată pentru prima dată în revista „Mathematics Magazine", septembrie-octombrie 1950 (problema Q—12).

Cuburile de $2 \times 2 \times 2$ și $3 \times 3 \times 3$ sînt caracteristice, în sensul că, indiferent de felul în care sînt reașezate bucățile înainte de fiecare tăietură (cu condiția ca fiecare porțiune să fie tăiată undeva), primul va necesita totdeauna trei tăieturi, iar al doilea șase, pentru a fi desfăcute în cuburi unitate.

Cubul de $4 \times 4 \times 4$ necesită nouă tăieturi, dacă bucățile sînt menținute împreună sub formă de cub, dar dacă le așezăm convenabil înaintea fiecărei secționări, numărul acestora poate fi redus

la șase. Dacă, la fiecare așezare, vedeți că orice bucată este tăiată cît se poate de aproape de jumătate, înseamnă că ați obținut numărul minim de tăieturi. În general, pentru un cub de $n \times n \times n$, numărul minim de tăieturi este de $3k$, unde k este definit prin

$$2^k \geqslant n > 2^{k-1}.$$

Această problemă generală a fost pusă de L. R. Ford Jr. și de D.R. Fulkerson, ambii de la Rand Corporation, în revista „American Mathematical Monthly", august-septembrie 1957 (problema E 1279), iar răspunsul a fost dat în numărul din martie 1958. Problema este un caz special al uneia mai generale (minimul de tăieturi necesare pentru a descompune un bloc de dimensiuni $a \times b \times c$ în cuburi unitate) pusă de Leo Moser, de la Universitatea din Alberta, „Mathematics Magazine", vol. 25, martie-aprilie 1952, p. 219.

Eugene J. Putzer și R.W. Lowen au generalizat problema mai departe, în memoriul *Despre metoda optimă de a tăia o cutie rectangulară în cuburi unitate*, publicat în 1958 de Convair Scientific Research Laboratory, San Diego. Autorii au considerat blocuri n-dimensionale cu laturi întregi, care urmează să fie descompuse în hipercuburi unitate printr-un număr minim de tăieturi plane. În cazul tridimensional, autorii cred că problema „ar putea avea importante aplicații în industria brînzeturilor și a zahărului".

8. Navetistul a mers pe jos 55 min, înainte ca soția să-l fi luat în mașină. Dat fiind că ei ajung acasă cu 10 min mai devreme ca de obicei, înseamnă că soția a economisit 10 min din drumul ei obișnuit spre și de la stație, sau 5 min din drumul ei spre stație. Rezultă că ea și-a întîlnit soțul cu 5 min înainte de momentul obișnuit cînd îl lua la ora 5, adică la 4h 55 min. El a pornit pe jos la ora 4, deci a mers 55 min. Viteza de mers a soțului, viteza automobilului soției și distanța dintre casa lor și stație nu sînt necesare pentru rezolvarea problemei. Dacă ați încercat să o soluționați, născocind figuri pentru aceste variabile, ați ajuns probabil la concluzia că problema este exasperantă.

Cînd problema a fost propusă în „Scientific American", ea a fost nefericit formulată, sugerînd că soția sosea de obicei mai devreme la stație și aștepta trenul de ora 5. În acest caz, timpul cît soțul a mers pe jos se situează între 50 și 55 min.

Mai mulți cititori au arătat că problema conduce destul de bine la soluția a ceea ce logicienii militari numesc un „grafic de marș"

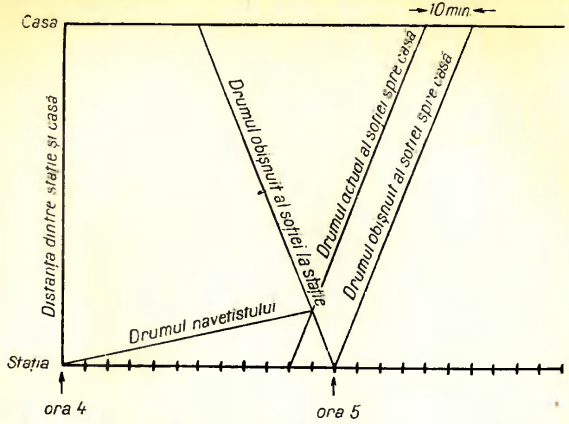


Fig. 16 Graficul problemei cu navetistul.

(fig. 16). Timpul este trecut pe axa orizontală, iar distanța, pe cea verticală. Graficul arată limpede că soția putea să plece de acasă cu cel mult 10 min mai devreme decît momentul cerut pentru a ajunge în stație o dată cu trenul. Limita inferioară a timpului cît soțul a mers pe jos (50 min) poate surveni numai atunci cînd soția pornește cu 10 min mai devreme, sau conduce mașina de obicei cu o viteză infinită (în care caz, soțul sosește acasă exact în momentul în care ea pleacă), sau soțul merge cu o viteză infinitezimală (în care caz, ea îl întîlnește în stație, după ce el a umblat 50 min, fără să ajungă nicăieri). „Nici una dintre aceste imagini nu pare falsă", scrie David W. Weiser, profesor asistent de științe naturale la Universitatea din Chicago, într-una din cele mai clare analize din cîte am primit referitor la această problemă, „considerînd drumul făcut de o soție cu automobilul sau de un soț care merge pe jos și trece pe lîngă o cîrciumă".

9. Fișicul fals poate fi identificat printr-o singură cîntărire a monedelor. Luați o monedă din primul fișic, două din al doilea,

trei din al treilea și așa mai departe, pînă la toate 10 din al zecelea. Puneți apoi acest eșantion pe balanța automată. Excesul ei de greutate, în grame, va corespunde cu numărul de ordine al fișicului fals. De exemplu, dacă grupul de monede cîntărește cu 7 grame mai mult decît ar trebui, atunci fișicul falsificat este al șaptelea, din care ați luat 7 monede (cîntărind fiecare cu un gram mai mult decît o monedă bună de 0,5 dolari). Procedeul descris mai sus rămîne valabil și în cazul existenței unui al unsprezecelea fișic, căci dacă vom constata că nu avem exces de greutate, înseamnă că fișicul falsificat este cel rămas, al unsprezecelea.

Capitolul 4 TICKTACKTOE

Cine nu a jucat în copilărie ticktacktoe, cea mai veche și mai universală luptă de ingeniozitate despre care Wordsworth scria *(Preludiu*, cartea I):

> Cînd seara, cu creionul și tăbliţa
> Curată și-mpărţită în carouri,
> Stînd, frunte lîngă frunte, puneam în pătrăţele
> Ba cruci, ba cifre, și ne trudeam vîrtos, întăritaţi
> De-o luptă prea măruntă ca s-o mai pun în versuri.

La prima vedere, nu este ușor de înțeles atracția durabilă a unui joc care nu pare decît cel mai mult o petrecere pentru copii. Or, deși este adevărat că și în versiunea cea mai simplă a jocului numărul de mutări posibile este foarte mare — 15 120 ($9\times8\times7\times6\times5$), variante diferite numai pentru primele cinci mutări — există în realitate numai cîteva scheme de bază, iar un jucător isteț poate deveni imbatabil, cu condiția să analizeze jocul timp de o oră sau ceva mai mult. Dar ticktacktoe are, totodată, variante și aspecte strategice mai complexe.

În argoul teoriei jocurilor, ticktacktoe este o competiție de două persoane, „finită" (ajunge la un sfîrșit definit), nu cuprinde nici un element de hazard și se joacă cu „informație completă", toate mutările fiind cunoscute de ambii oponenți. Jucat „rațional" de ambele părți, jocul trebuie să se termine printr-un rezultat nehotărît. Singura șansă de a cîștiga constă în a prinde un adversar neprevăzător într-o „capcană", cînd o partidă poate fi cîștigată la mutarea următoare, pe două căi, dintre care numai una singură poate fi blocată.

Dintre cele trei deschideri posibile — un colț, centrul sau o celulă laterală — deschiderea cea mai puternică este colțul, deoarece adversarul poate evita de a fi prins în cursă la mutarea următoare numai prin una singură dintre cele opt variante posibile: centrul.

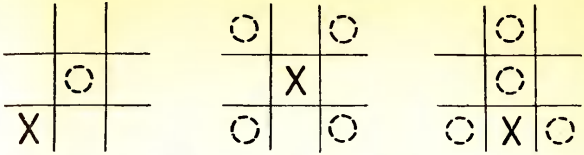


Fig. 17 Primul jucător (X) are alegerea între trei deschideri. Pentru a nu pierde, al doilea jucător (0) trebuie să aleagă una dintre variantele indicate în desen.

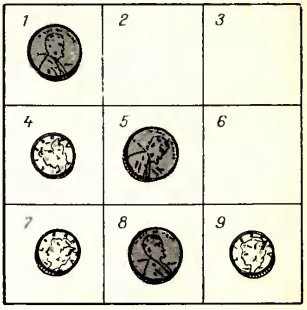


Fig. 18 Ticktacktoe cu fise mutate.

Reciproc, capcanele la deschiderea în centru pot fi blocate numai prin alegerea unui colț. Deschiderea laterală, cea mai interesantă din mai multe puncte de vedere, dată fiind bogăția ei de capcane pentru ambele părți, trebuie contracarată alegînd una din cele patru celule. Cele trei deschideri și replicile posibile ale celui de-al doilea jucător, care acționează rațional, sînt reprezentate în fig. 17.

Variante mai interesante din punct de vedere matematic ale jocului ticktacktoe erau practicate cu multe secole înaintea erei noastre. Toate folosesc șase fișe și pot fi jucate pe tabla din fig. 18, un jucător folosind trei monede de o mărime, iar celălalt, trei monede de altă mărime. În forma cea mai simplă, răspîndită în antichitate la chinezi, greci și romani, jucătorii puneau cîte o fișă pe tablă, pînă cînd erau așezate toate șase. Dacă nici un jucător nu cîștigase prin așezarea a trei fise într-un rînd (ortogonal sau diagonal), ei continuau să joace mutînd de fiecare dată cîte o singură fișă într-un pătrățel adiacent. Sînt permise numai mutările ortogonale.

Ovidiu menționează acest joc în cartea a III-a din *Ars Amatoria*, clasificîndu-l într-un grup de jocuri pe care, după sfatul său, o femeie trebuie să-l stăpînească, dacă vrea să se bucure de popularitate printre bărbați. Jocul era foarte răspîndit în Anglia în jurul anului 1300, sub denumirea de *three men's morris* (dansul celor trei bărbați), strămoșul dansului celor 9, 11 și 12 bărbați sau al „morii" *(mill)*, cum i se spune astăzi de obicei în Statele Unite. Dat fiind că primul jucător cîștigă sigur, dacă face prima mutare în centru, această deschidere este, de obicei, interzisă. Cu această restricție, jocul duce la un rezultat nehotărît, dacă este jucat rațional, dar el abundă în capcane posibile de ambele părți.

O variantă a jocului permite mutarea în celulele vecine în lungul celor două diagonale principale ale pătratului. O altă extindere (atribuită indienilor din vechea Americă) permite fiecărei fise mutarea cu o celulă în orice direcție, ortogonal sau diagonal (de exemplu, este posibilă mutarea de la celula 2 la celula 4). În prima versiune, jucătorul care deschide poate forța cîștigul, dacă are voie să înceapă cu centrul, însă a doua variantă duce probabil la un rezultat nedecis. O versiune cu mutări libere, numită *les pendus* (spînzurații) în Franța, permite ca orice fisă să fie trecută *în indiferent care* celulă goală. Se crede că și în această variantă rezultatul rămîne nedecis, dacă ambii adversari acționează rațional.

Mai multe variante de ticktacktoe cu fise mutate au fost aplicate la table de 4×4, fiecare jucător utilizînd patru fise și căutînd să le așeze într-un rînd. Cu cîțiva ani în urmă, scamatorul John Scarne a inventat o interesantă versiune de 5×5, denumită „teeko". Jucătorii așază pe rînd fiecare cîte patru fise, după care mută alternativ cu cîte un pătrățel în orice direcție. Cîștigă jucătorul care așază patru într-un rînd, ortogonal sau diagonal, sau într-o formație pătrată pe patru celule adiacente.

Numeroase variante amuzante ale jocului ticktacktoe nu utilizează însă fise mutate. De exemplu toetacktick (un nume propus de cititorul Mike Shodell, din Great Neck, New York). Acesta se joacă la fel ca varianta uzuală, numai că primul jucător care așază trei fise într-un rînd *pierde*. Al doilea jucător are un avantaj decisiv. Primul jucător poate forța rezultatul nedecis, numai dacă deschide în centru. După aceea, acționînd simetric cu cel de-al doilea jucător, el își poate asigura rezultatul nedecis.

În ultimii ani, au fost imaginate mai multe variante tridimensionale de ticktacktoe. Ele se joacă cu table cubice, cîștigul constînd în a așeza fisele după o linie ortogonală sau diagonală, sau

într-una din diagonalele principale ale cubului. La un cub de $3\times3\times3$, primul jucător cîştigă cu uşurinţă. În mod curios, jocul nu se poate termina niciodată nedecis, deoarece primul jucător are 14 alegeri şi este imposibil să le facă pe toate 14 fără a cîştiga. Cubul de $4\times4\times4$ conduce la un joc mai interesant şi, jucat raţional, poate să ducă sau să nu ducă la un rezultat nedecis.

S-au propus şi alte modalităţi de joc cu cuburi. Alan Barnert din New York a sugerat să se definească un cîştig ca fiind o arie pătrată de fise în fiecare plan ortogonal, ca şi în cele şase plane diagonale principale. Price Parks şi Robert Satten, pe cînd erau studenţi la Universitatea din Chicago în 1941, au imaginat un interesant joc cubic de $3\times3\times3$, în care se cîştigă prin obţinerea a două linii intersectate. Mutarea cîştigătoare trebuie să fie în punctul de intersecţie. Deoarece o mutare iniţială în cubul central asigură cîştigul, această mutare este interzisă, cu excepţia situaţiei cînd este mutare cîştigătoare sau necesară pentru a bloca oponentul, în cazul cînd acesta ar cîştiga la următoarea sa mutare.

Un ticktacktoe cuadridimensional se poate juca pe un hipercub închipuit, secţionîndu-l în pătrate bidimensionale. De exemplu, un hipercub de $4\times4\times4\times4$ ar fi reprezentat grafic cum se arată în fig. 19. Cu această tablă, un cîştig de patru într-un rînd se realizează dacă patru fise sînt în linie dreaptă în orice cub care poate fi format prin asamblarea a patru pătrate în lungul oricărei linii ortogonale sau pe una dintre cele două diagonale principale. Fig. 20 reprezintă un cîştig cu un astfel de cub asamblat. Se consideră că primul jucător are cîştigul asigurat, dar jocul poate fi nedecis, dacă se foloseşte un hipercub de $5\times5\times5\times5$. Numărul de linii posibile pe care se poate cîştiga la un cub de n dimensiuni este dat de următoarea formulă:

$$\frac{(k+2)^n - k^n}{2},$$

unde n este numărul de dimensiuni, iar k numărul de celule pe o latură.

Pentru explicarea deducerii acestei formule, vezi comentariile lui Leo Moser, în „American Mathematical Monthly", februarie, 1948, p. 99.

Vechiul joc japonez *go-moku* (cinci pietre), popular şi astăzi în Orient, se joacă pe intersecţiile unei table de *go* (aceasta este echivalent cu a juca pe celulele unui pătrat de 19×19). Jucătorii

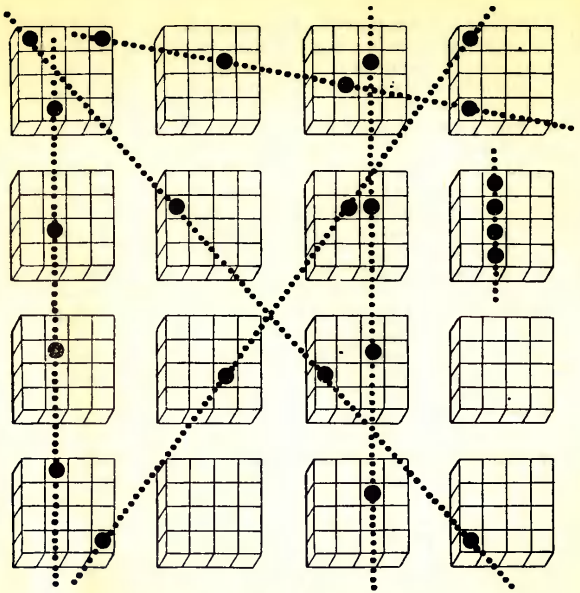
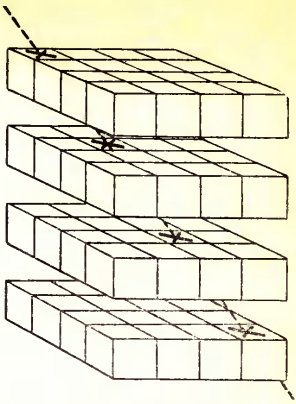


Fig. 19 Ticktacktoe cuadridimensional, Liniile punctate reprezintă cîteva variante cîștigătoare.

așază pe rînd fisele, în număr nelimitat, pînă cînd unul dintre ei cîștigă, așezînd cinci într-un rînd, ortogonal sau diagonal. Nu se permit mutări. Experții sînt de părere că primul jucător poate impune cîștigul, dar după cîte știu, nu s-a publicat niciodată o demonstrație. Jocul a devenit popular în Anglia, cam prin anul 1880, sub numele de *go-bang*. Se juca uneori pe o tablă de șah obișnuită, fiecare jucător avînd 12 sau 15 pietre. Mutările erau admise în orice direcție, dacă nici unul dintre adversari nu cîștigase pînă în momentul așezării tuturor pieselor.

Fig. 20 Cubul asamblat.



În ultimul deceniu a fost construit un număr de mașini electronice de ticktacktoe. Este interesant că primul robot de ticktacktoe a fost inventat (deși niciodată construit efectiv) de Charles Babbage, pionierul dispozitivelor de calcul din Anglia secolului al XIX-lea. Babbage intenționa să-și expună mașina la Londra, spre a obține fonduri pentru lucrări de mai mare anvergură, dar a renunțat la planurile sale după ce a aflat că expozițiile obișnuite de mașini curioase din Londra (printre care o „mașină vorbitoare" și una care făcea versuri în latină) au constituit eșecuri financiare.

O trăsătură nouă a robotului lui Babbage a constat în metoda sa de a media alegerile în cazul tacticilor alternative de joc la fel de bun. Mașina făcea un total curent al numărului de jocuri cîștigate. Pusă în situația de a alege între mutările A și B, mașina consulta acest total și juca A, dacă numărul era par, și B, dacă era impar. În cazul a trei alternative, robotul împărțea totalul la 3 pentru a obține resturile 0, 1 sau 2, fiecare rezultat determinînd o altă mutare, „Evident că, în felul acesta, poate fi luat în considerare orice număr de condiții", scrie Babbage, în cartea sa *Passages from the Life of a Philosopher*, 1864, pp. 467—471. „Un spectator care examina robotul... putea să-l privească mult timp înainte de a desco-

peri principiul după care acționa". Din păcate Babbage nu a lăsat nici o documentație privitor la ceea ce el numește piesele mecanice „simple" ale mașinii sale, așa încît putem doar să facem ipoteze despre planul ei. El menționează însă că „își închipuie că mașina putea fi formată din figurile a doi copii care joacă unul împotriva celuilalt, asistați de o oaie și de un cocoș. Copilul care cîștiga jocul putea bate din palme, în timp ce cocoșul cînta, pe cînd copilul care pierdea putea să plîngă și să-și frîngă mîinile, în timp ce oaia începea să behăie". O mașină de ticktacktoe mai puțin fantezistă, prezentată în 1958 la Tîrgul industrial portughez de la Lisabona, cotcodăcea cînd cîștiga și mormăia cînd pierdea (probabil cînd era îndrumată pe un circuit de „joc prost").

S-ar putea crede că programarea unui calculator numeric pentru a juca ticktacktoe sau proiectarea unor circuite speciale pentru o mașină de ticktacktoe ar fi o chestiune simplă. Este adevărat, dacă aveți de gînd să construiți un robot-maestru care să cîștige un număr maxim de jocuri împotriva unor adversari lipsiți de experiență. Dificultatea constă în a ghici care va fi maniera de joc cea mai plauzibilă a unui novice. Desigur, el nu-și va face mutările cu totul la întîmplare, dar cît va fi de isteț?

Pentru a da o idee asupra genului de complicații care apar, să presupunem că novicele deschide cu celula 8. Mașina ar putea foarte bine să adopte un răspuns irațional, indicînd celula 3! Ar fi fatal într-un joc împotriva unui expert, dar dacă adversarul nu are o iscusință prea mare, nu este plauzibil ca el să pună fisa următoare, conform singurei replici cîștigătoare, în celula 9. Dintre cele șase replici rămase, patru sînt dezastruoase. În adevăr, el va încerca ispita puternică de a juca celula 4, deoarece aceasta conduce la două capcane promițătoare împotriva robotului. Din nefericire, robotul poate sări peste propria sa capcană, jucînd celula 9, iar la mutarea următoare, celula 5. S-ar putea întîmpla, ca, într-un joc real, mașina să cîștige mai des prin această strategie neprecaută decît pe baza unei tactici mai sigure, care, după toate aparențele, ar duce la un rezultat nedecis.

Un adevărat maestru al jocului, robot sau om, ar cunoaște răspunsurile cele mai probabile ale novicilor, așa cum sînt determinate din studiul statistic al jocurilor din trecut: totodată, el ar analiza stilul de joc al oricărui oponent, pentru a stabili ce gen de greșeli

va face acesta cu cea mai mare plauzibilitate. Dacă novicele învață pe măsură ce joacă, va trebui să se țină seama și de aceasta. O dată ajunși aici, modestul joc ticktacktoe conduce la probleme de probabilitate și de psihologie, care sînt departe de a fi banale.

ADAOS

Numele „ticktacktoe" are multe variante de ortografie și de pronunțare. Potrivit cu *Oxford Dictionary of Mother Goose Rhymes*, 1951, p. 406, el derivă dintr-un vechi cîntec englez de leagăn care sună astfel*:

Tit, tat, toe
Mișc întîi, dacă-mi dai voie.
Am trei tinerei. Stau în șir ca niște zmei.
Pun pe unul sus, pun pe altul jos
Și pe-al treilea frumos pe coroana ăstui moș.

Am observat că numeroși jucători de ticktacktoe au impresia greșită că, fiind în stare să joace cu o strategie imbatabilă, nu mai au nimic de învățat în această materie. Un maestru al jocului însă trebuie să fie capabil a extrage repede toate avantajele dintr-un joc prost. Următoarele trei exemple, toate cu deschidere laterală, vor clarifica această teză.

Dacă deschideți cu $X8$ și adversarul replică $O2$, răspunsul cel mai bun față de un novice este $X4$, deoarece astfel se cîștigă în patru din cele șase mutări care îi sînt acum accesibile lui O. El poate să vă blocheze capcanele, numai dacă joacă $O7$ sau $O9$.

Dacă adversarul deschide cu $X8$ și răspundeți cu un colț situat jos, să zicem $O9$, puteți sări peste capcanele cîștigătoare, dacă el joacă $X2$, $X4$ sau $X7$.

Dacă adversarul deschide $X8$, un răspuns $O5$ poate conduce la o dezvoltare amuzantă. Dacă el adoptă $X2$, puteți atunci să-i permiteți să hotărască el următoarea dv. mutare, căci este imposibil să continuați jocul fără a reuși să creați o capcană cîștigătoare!

* Tit, tat, toe,/ My first go,/ Three jolly butcher boys all in a row./ Stick one up, stick one down,/ Stick one in the old man's crown.

Am menționat, în cadrul capitolului, că varianta cu fise mobile, populară în Roma antică, asigură cîștigul primului jucător, dacă el deschide cu pătrățelul central. Pentru cititorii pe care îi interesează problema, dăm cele două linii posibile de a impune jocul:

	X	*O*
	5	3
	4	6
(1)	9	1
	4 *la* 7	*nici o mutare*
	5 *la* 8	
	5	6
	1	9
(2)	3	2
	1 *la* 4	*nici o mutare*
	4 *la* 7	

Aceste tactici ale jocului sînt cîștigătoare, indiferent dacă sînt sau nu îngăduite mutările în lungul celor două diagonale principale, însă prima este ineficace dacă sînt admise mutările după diagonalele scurte.

Capitolul 5 PARADOXURI ALE PROBABILITĂȚII

Teoria probabilităților este un domeniu al matematicii deosebit de bogat în paradoxuri, adică în adevăruri care se lovesc atît de puternic de bunul simț, încît devine greu să le dăm crezare, chiar după ce sîntem puși în fața demonstrațiilor lor. Paradoxul datelor de naștere este un bun exemplu. Dacă alegeți la întîmplare 24 de persoane, care credeți că este probabilitatea ca două sau mai multe dintre ele să aibă aceeași zi de naștere (adică aceeași lună și aceeași zi a anului)? Intuitiv, simțiți că ar trebui să fie foarte mică. În fapt, ea este 27/50, adică ceva mai mare de 50%!

În lucrarea *Un, doi, trei... infinit*, George Gamow dă următoarea metodă simplă pentru a ajunge la acest rezultat surprinzător. Probabilitatea ca ziua de naștere a două persoane oarecare să nu fie aceeași este, evident, 364/365 (deoarece avem numai o singură șansă din 365 ca ziua de naștere a cuiva să coincidă cu a altcuiva). Probabilitatea ca ziua de naștere a unei a treia persoane să difere de celelalte două este de 363/365; a unei a patra persoane, 362/365, și așa mai departe, pînă ajungem la a 24-a persoană (342/365). Obținem astfel un șir de 23 de fracții, care trebuie înmulțite între ele, ca să calculăm probabilitatea ca toate cele 24 zile de naștere să fie diferite. Produsul este o fracție care, prin simplificare, dă 23/50. Cu alte cuvinte dacă ați paria pe cel puțin o coincidență a zilelor de naștere la 24 de persoane, pînă la urmă ați pierde 23 și ați cîștiga 27 din fiecare 50 de pariuri. (Acest calcul nu ține seama de 29 februarie și nici de faptul că zilele de naștere prezintă tendința de a se concentra mai mult în unele luni decît în altele; prima circumstanță reduce probabilitatea, iar a doua o mărește.)

Aceste ciudățenii sînt atît de surprinzătoare, încît experimentarea lor efectivă într-o sală de clasă sau societate constituie un foarte bun amuzament. Dacă sînt de față mai mult de 23 de persoane, cereți fiecăreia să-și scrie ziua de naștere pe o bucată de hîrtie. Strîngeți hîrtiile și comparați-le. Cel mai probabil, veți avea o

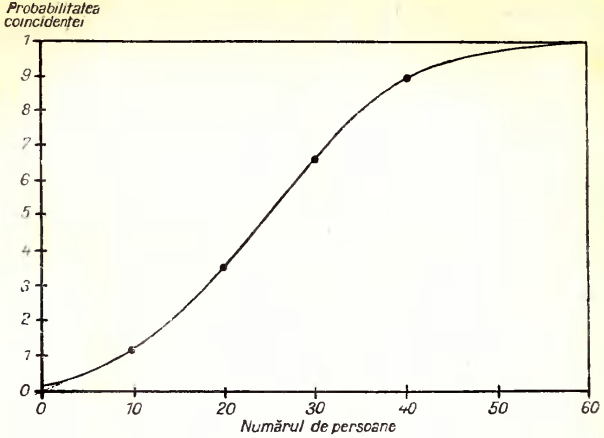


Fig. 21

coincidență minimă de două date, adesea mai multe, spre uimirea respectivelor persoane, care se cunosc eventual de ani de zile. Din fericire, nu contează, în ultimă instanță, dacă cineva trișează și indică o dată incorectă. Situația stranie se menține.

O metodă mai ușoară de a verifica paradoxul constă în a nota zilele de naștere a 24 de nume, extrase la întîmplare dintr-un anuar sau dintr-un dicționar biografic. Firește, cu cît luați mai multe nume decît 24, cu atît va fi mai mare probabilitatea coincidenței. Figura 21 (reprodusă din cartea lui William R. Ransom, *One Hundred Mathematical Curiosities*, 1955) reprezintă grafic cum crește curba probabilității, o dată cu numărul de persoane. Graficul se oprește la 60 de persoane, deoarece dincolo de acest număr probabilitatea se apropie prea mult de certitudine, pentru ca să mai putem deosebi curba de o linie dreaptă. Observați cît de abrupt urcă curba pînă ajunge cam în dreptul a 40 de persoane, după care se îndreaptă lin spre certitudine. Pentru 100 de persoane, șansa unui

pariu valabil pe o coincidență este de aproximativ 3 300 000 : 1. Firește, nu obținem certitudinea absolută decît pentru 366 de persoane.

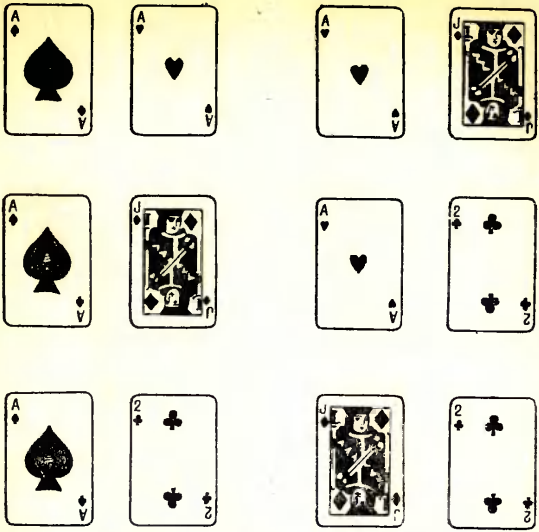
O bună ilustrare a paradoxului este furnizată de ziua nașterii și a morții președinților Statelor Unite. Probabilitatea unei coincidențe în fiecare caz (33 de zile de naștere, 30 de zile de deces) este apropiată de 75%. Incontestabil, Polk și Harding s-au născut la 2 noiembrie, iar *trei* președinți — Jefferson, Adams și Monroe — au murit la 4 iulie.

Mai uluitor, poate, este paradoxul celui de-al doilea as. Să presupunem că jucați bridge și, după ce cărțile au fost împărțite, vă uitați la cărțile dv. și anunțați: „Am un as". Probabilitatea ca să aveți un al doilea as poate fi calculată cu precizie. Ea este de 5359/14498, mai puțin decît 1/2. Să presupunem însă că ați căzut cu toții de acord asupra unui as anumit, să zicem asul-de pică. Jocul continuă pînă cînd vă vine o carte care vă permite să spuneți: „Am asul de pică". Probabilitatea să aveți un al doilea as este acum de 11 686/20 825, ceva *mai bună* decît $\frac{1}{2}$! De ce este influențată șansa de numele asului?

Calculul efectiv al șanselor în aceste două cazuri, este lung și laborios, însă felul cum acționează paradoxul poate fi ușor înțeles, dacă reducem pachetul de cărți de joc la numai patru bucăți: asul de pică, asul de cupă, doi de treflă și valetul de caro. Dacă aceste cărți sînt amestecate și împărțite la doi jucători, există numai șase combinații posibile (redate în fig. 22), care îi pot reveni unui jucător. Cinci dintre aceste mîini de cîte două cărți îi permit jucătorului să spună „Am un as", dar numai într-un singur caz el are pe cel de-al doilea. Prin urmare, probabilitatea de a avea și cel de-al doilea as este de 1/5. Pe de altă parte, există numai trei combinații care îi îngăduie jucătorului să declare că are asul de pică. Una dintre ele include și al doilea as, drept care probabilitatea acestuia este de 1/3.

Un paradox similar este acela cu al doilea copil. Mr. Smith spune: „Am doi copii, și cel puțin unul dintre ei este băiat". Care este probabilitatea ca și al doilea copil să fie băiat? Sîntem ispitiți să spunem 1/2, pînă cînd facem lista celor trei combinații posibile de egală probabilitate: *BB*, *BF*, *FB*. Numai una este *BB*, deci probabilitatea este 1/3. Dacă Smith ar fi spus că *cel mai mare* (sau cel mai înalt sau cel mai voinic etc.) copil este băiat, atunci situația ar fi fost cu totul diferită. Acum combinațiile se reduc la *BB* și *BF*, iar

Fig. 22



probabilitatea ca al doilea copil să fie băiat sare la 1/2. Dacă nu ar fi așa, am avea o cale foarte ingenioasă de a ghici fața unei monede ascunse, cu șanse mai mult decît egale. Pur și simplu, am arunca propria noastră monedă. Dacă ea cade cu valoarea, am raționa astfel: „Avem aici două monede, și una dintre ele (a mea), prezintă valoarea. Probabilitatea ca cealaltă să prezinte tot valoarea este de 1/3, deci voi paria pe stemă". Bineînțeles că eroarea constă în faptul că am specificat *care anume* monedă a căzut cu valoarea. Este totuna cu a identifica copilul cel mare cu băiatul, și aceasta schimbă șansa într-un mod similar.

Cel mai celebru dintre toate paradoxurile probabilistice este paradoxul de la St. Petersburg, prezentat pentru prima dată Academiei de la Petersburg de către renumitul matematician Daniel Bernoulli. Să presupunem că arunc o monedă și convin să plătesc

un dolar, dacă ea cade cu valoarea în sus. Dacă ea cade cu stema o arunc din nou, plătind de astă dată doi dolari dacă moneda cade cu valoarea. Dacă moneda a căzut iarăşi cu stema, o arunc a treia oară şi plătesc patru dolari dacă ea cade cu valoarea. Pe scurt, mă angajez să dublez penalitatea la fiecare aruncare şi continui pînă cînd sînt obligat să plătesc efectiv. Cît sînteţi dispus să plătiţi pentru a obţine privilegiul de a juca cu mine acest joc unilateral?

Răspunsul de necrezut este că-mi puteţi plăti orice sumă, să zicem un milion de dolari, pentru fiecare joc şi să speraţi totuşi că o veţi scoate bine la capăt. Într-un singur joc, există probabilitatea de 1/2 că veţi cîştiga un dolar, de 1/4 că veţi cîştiga doi dolari, de 1/8 că veţi cîştiga patru dolari etc. De aceea, totalul pe care vă puteţi aştepta să-l cîştigaţi este de $(1\times1/2)+(2\times1/4)+(4\times1/8)$.... Suma acestei serii infinite este infinită. Ca rezultat, indiferent de suma finită pe care mi-o plătiţi dinainte pentru un joc, veţi cîştiga pînă la urmă, dacă jucăm un timp destul de îndelungat. Aceasta, în ipoteza că am un capital nelimitat şi că putem juca un număr nelimitat de jocuri. Dacă aţi plătit, bunăoară, 1 000 de dolari pentru un joc, şansa este foarte mare ca să pierdeţi. Dar această perspectivă este mai mult decît compensată de faptul că aveţi o şansă, chiar dacă-i mică, de a cîştiga o sumă astronomică la o serie de aruncări lungă şi neîntreruptă. Dacă dispun numai de un capital finit, ceea ce este totdeauna cazul în practica reală, atunci preţul cinstit pentru un joc este, de asemenea, finit. Paradoxul de la St. Petersburg este cuprins în orice sistem „de dublare" al unui joc de noroc, iar analiza sa completă conduce la tot soiul de ramificaţii complicate.

Carl G. Hempel, o figură de frunte a şcolii „pozitivismului logic", actualmente profesor de filozofie la Universitatea Princeton, a descoperit un alt paradox probabilistic uimitor. Chiar din momentul cînd a fost expus pentru prima dată, în 1937, în revista suedeză „Theoria", paradoxul lui Hempel a constituit subiectul a numeroase discuţii savante în rîndul celor ce se ocupă de filozofia ştiinţei, deoarece el ajunge pînă în miezul propriu-zis al metodei ştiinţifice.

Să admitem, începe Hempel, că un savant vrea să cerceteze ipoteza „toţi corbii sînt negri". Investigaţia sa constă în a examina cît mai mulţi corbi cu putinţă. Cu cît găseşte mai mulţi corbi negri, cu atît devine ipoteza mai probabilă. De aceea, fiecare corb negru poate fi considerat ca un „caz particular confirmator" al ipotezei. Cei mai mulţi oameni de ştiinţă cred că au o noţiune perfect clară despre ceea ce este un „caz particular confirmator". Paradoxul lui

Hempel spulberă repede această iluzie, deoarece putem demonstra ușor, cu o logică de fier, că o vacă roșie este, și ea, un caz particular confirmator al ipotezei că toți corbii sînt negri! Iată cum se procedează.

Enunțul „Toți corbii sînt negri" poate fi transformat, printr-un procedeu pe care logicienii îl numesc „inferență imediată", în enunțul logic echivalent „Toate obiectele care nu sînt negre nu sînt corbi". Al doilea enunț este identic ca semnificație cu cel inițial; doar formularea verbală diferă. Evident, descoperirea unui obiect care confirmă al doilea enunț trebuie să-l confirme și pe primul.

Să presupunem acum că savantul caută obiecte care nu sînt negre, pentru a confirma ipoteza că toate aceste obiecte nu sînt corbi. El ajunge la un obiect roșu. O cercetare mai îndeaproape îi dezvăluie că nu este un corb, ci o vacă. Vaca cea roșie este, în mod clar, un caz particular confirmator al tezei: „Toate obiectele care nu sînt negre nu sînt corbi". De aceea, ea trebuie să mărească adevărul probabil al ipotezei logic echivalente „Toți corbii sînt negri". Firește, același argument se aplică unui elefant alb sau unei scrumbii purpurii sau cravatei verzi a savantului. După cum a spus recent un filozof, într-o zi ploioasă un ornitolog care studiază culoarea corbilor ar putea să-și continue cercetarea fără să-și ude pantofii. El nu are decît să se uite de jur împrejur în odaia sa și să noteze cazurile de obiecte nenegre care nu sînt corbi!

Ca și în exemplele de paradoxuri anterioare, dificultatea pare să conste, nu într-un raționament eronat, ci în ceea ce Hempel numește o „intuiție greșit îndrumată". Situația începe să capete mai mult sens, cînd considerăm un exemplu mai simplu. O firmă folosește un mare număr de dactilografe, despre care știm că unele au părul roșu. Vrem să verificăm ipoteza că toate aceste dactilografe cu părul roșu sînt măritate. O metodă evidentă de a realiza aceasta constă în a merge la fiecare dactilografă cu părul roșu și în a o întreba dacă are un soț. Există însă și o altă cale, care ar putea fi chiar mai eficace. Obținem de la serviciul personalului o listă a tuturor dactilografelor nemăritate. Apoi le vizităm pe acestea, pentru a verifica ce culoare are părul lor. Dacă nici una nu are părul roșu, ipoteza noastră este complet confirmată. Nimeni nu va contesta faptul că fiecare dactilografă nemăritată, al cărei păr nu este roșu, va fi un caz particular confirmator al teoriei că toate dactilografele cu păr roșu ale firmei sînt măritate.

Există o mică dificultate de a accepta acest procedeu de investigație, deoarece mulțimile cu care avem de-a face conțin un număr

de elemente nu prea mare. Dacă încercăm însă să stabilim dacă toți corbii sînt negri, avem o disproporție enormă între numărul de corbi care trăiesc pe planeta noastră și numărul de lucruri nenegre. Oricine va fi de acord că verificarea lucrurilor nenegre este o cale cît se poate de ineficientă pentru a duce la bun sfîrșit cercetarea. În ultimă instanță, problema este mai subtilă, anume dacă are vreun înțeles să spunem că o vacă roșie este, într-un anumit sens, un caz particular confirmator. Adaugă aceasta oare, măcar atunci cînd avem de-a face cu mulțimi finite (mulțimile infinite ne conduc spre ape mult mai adînci), o parte oricît de mică la probabilitatea ipotezei noastre inițiale? Unii logicieni cred că da. Alții nu sînt atît de siguri. Ei arată, bunăoară, că o vacă roșie se poate dovedi, prin exact același raționament, ca fiind un caz particular confirmator al ipotezei „toți corbii sînt albi". Cum poate descoperirea unui obiect să adauge ceva la adevărul probabil a două ipoteze contradictorii?

Am putea fi ispitiți să respingem paradoxul lui Hempel, cu un zîmbet și cu o ridicare din umeri. Trebuie însă ținut minte că numeroase paradoxuri logice, mult timp privite drept curiozități banale, s-au dovedit de o imensă importanță în dezvoltarea logicii moderne. Într-un mod similar, unele analize ale paradoxului lui Hempel ne-au furnizat pînă acum puncte de vedere valabile asupra naturii obscure a logicii inductive, instrument prin care se obține întreaga cunoaștere științifică.

Capitolul 6 JOCUL ICOSIAN ȘI TURNUL DIN HANOI

Puține experiențe sînt atît de tulburătoare pentru un matematician ca descoperirea faptului că două structuri matematice, în aparență independente una de cealaltă, sînt, în realitate, strîns legate între ele. Recent, D.W. Crowe de la Universitatea din Columbia Britanică a făcut o astfel de descoperire relativ la două enigme matematice, care s-au bucurat de popularitate în secolul al XIX-lea: „Jocul icosian" și „Turnul din Hanoi". Vom începe prin a le descrie pe fiecare în parte și vom arăta apoi maniera uluitoare în care se înrudesc.

Jocul icosian a fost inventat în jurul anului 1850 de marele matematician irlandez William Rowan Hamilton. El avea menirea de a ilustra un tip de calcul curios, pe care-l imaginase și care era similar, din mai multe puncte de vedere, cu faimoasa sa teorie a cuaternionilor (precursorul analizei vectoriale moderne). Calculul era aplicabil unui număr de probleme neobișnuite, constînd în a trasa drumuri pe suprafețele celor cinci solide platonice, în particular pe icosaedru și pe dodecaedru. Hamilton l-a numit calculul icosian, deși jocul era, în fapt, jucat pe muchiile unui dodecaedru. În 1859, Hamilton a vîndut jocul unui comerciant londonez, pentru 25 de lire sterline; el a ajuns apoi pe piață, în diverse forme, în Anglia și pe Continent. Aceasta este, după cum povestește biograful lui Hamilton, singura sumă pe care savantul a primit-o vreodată direct pentru o descoperire sau pentru o lucrare publicată.

Hamilton a sugerat o varietate de enigme și de jocuri care se pot efectua pe dodecaedru, dar enigma de bază este următoarea. Porniți dintr-un vîrf oarecare al solidului (Hamilton a dat fiecărui vîrf numele cîte unui oraș mare); apoi, mergînd în lungul muchiilor,

efectuați o „călătorie completă în jurul lumii", vizitînd fiecare vîrf o dată și numai o dată, și reveniți la vîrful din care ați plecat. Cu alte cuvinte, drumul trebuie să formeze un circuit închis în lungul muchiilor, trecînd cîte o singură dată prin fiecare vîrf.

Dacă ne închipuim că suprafața unui dodecaedru este confecționată din cauciuc, putem fixa în centru una dintre fețe și să întindem suprafața pînă cînd se situează într-un plan. Muchiile suprafeței vor forma atunci rețeaua din fig. 23. Această rețea este topologic identică cu rețeaua formată de muchiile dodecaedrului solid și, bineînțeles, este mult mai ușor să lucrăm cu ea decît cu solidul. Cititorul se poate distra, efectuînd „ocolul" pe această rețea și folosind fise pentru a marca fiecare vîrf vizitat.

Pe un dodecaedru cu vîrfurile nemarcate, există numai două circuite hamiltoniene care diferă ca formă și care sînt imaginea în oglindă a celuilalt. Dacă însă vîrfurile sînt etichetate și considerăm fiecare traseu ca fiind „diferit" dacă trece într-o succesiune diferită prin cele 20 de vîrfuri, atunci avem 30 de circuite distincte, fără a socoti parcursul invers pe fiecare dintre aceste drumuri. Traseuri hamiltoniene similare se pot găsi și pe celelalte patru

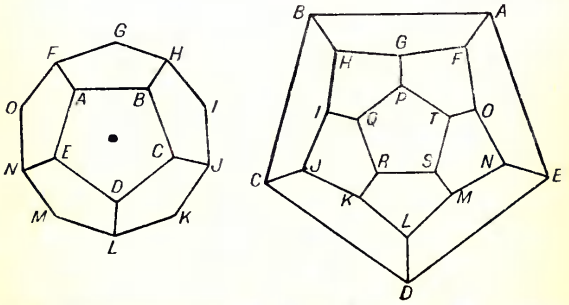


Fig. 23 Dodecaedrul (*stînga*) este fixat (punctul) și desfășurat în plan (*dreapta*). Rețeaua plană, deși nu este la scară cu solidul, este topologic identică cu muchiile.

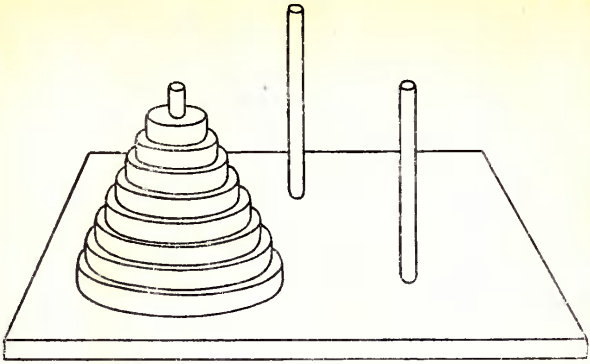


Fig. 24 Turnul din Hanoi.

solide platonice, precum și pe multe poliedre semiregulate, nu însă pe toate.

Cunoscutul turn din Hanoi a fost inventat de matematicianul francez Edouard Lucas și vîndut ca jucărie în 1883. Inițial el purta numele „Prof. Claus" de la colegiul din „Li-Sou-Stian", dar s-a descoperit curînd că acestea sînt anagrame pentru „Prof. Lucas" de la colegiul „Saint Louis". În figura 24, jucăria este desenată așa cum se confecționează în mod obișnuit. Problema constă în a muta turnul format din opt discuri pe una dintre cele două vergele libere, printr-un număr cît mai mic de mutări, mutînd cîte un singur disc o dată și neașezînd niciodată un disc mai mare peste unul mai mic.

Nu este greu să demonstrăm că există o soluție independentă de numărul discurilor turnului și că numărul minim de mutări necesare este dat de formula 2^n-1 (unde n este numărul de discuri). Astfel, trei discuri pot fi transportate în 7 mutări, patru în 15, cinci în 31 etc. Pentru cele opt discuri din fig. 24, sînt necesare 255 de mutări. Descrierea originară a jucăriei o prezenta ca fiind o versiune simplificată a miticului „Turn al lui Brahma" dintr-un

templu al orașului indian Benares. După cum spune descrierea, acest turn constă din 64 de discuri de aur de a căror transferare se ocupă preoții templului. Înainte ca ei să-și poată duce la bun sfîrșit treaba, templul va deveni praf și pulbere, iar lumea va dispărea printr-o lovitură de trăsnet. Dacă pieirea lumii poate fi pusă în discuție, în schimb trebuie să ne îndoim de prăbușirea templului. Formula $2^{64}-1$ dă un număr de 20 de cifre: 18 446 744 073 709 551 615. Presupunînd că preoții ar munci zi și noapte, efectuînd cîte o mutare de disc în fiecare secundă, le vor trebui multe mii de milioane de ani ca să-și termine treaba.

(În treacăt fie zis, numărul de mai sus nu este prim, însă dacă mărim numărul de discuri la 89, 107 sau 127, atunci numărul de mutări necesar pentru a le transfera în fiecare caz *este* prim. Acestea sînt exemple a ceea ce se cheamă numerele lui Mersenne: numere prime de forma 2^n-1. Lucas a fost cel dintîi care a verificat că $2^{127}-1$ este prim. Acest număr enorm, din 39 de cifre, a fost cel mai mare număr prim cunoscut pînă în 1952, cînd s-a utilizat un mare calculator electronic pentru a găsi cinci numere Mersenne mai mari, dintre care cel mai mare este $2^{2281}-1$. Relativ recent, s-a recurs la un calculator din Stockholm, pentru a demonstra că $2^{3217}-1$ este prim.)

Ne confecționăm ușor un turn din Hanoi, tăind opt pătrate din carton, de mărimi descrescătoare (sau utilizînd cărți de joc de la as pînă la opt), și mutîndu-le în lungul a trei segmente de dreaptă, desenate pe o foaie de hîrtie. Dacă segmentele formează un triunghi, următorul procedeu simplu va rezolva enigma pentru indiferent ce număr de „discuri". Transferați cel mai mic disc, mutîndu-l mereu în același sens în jurul triunghiului. În jocurile rămase, faceți unicul transfer posibil în care nu intră discul cel mai mic. (Este interesant de menționat că, în cazul cînd discurile sînt numerotate în ordine naturală, discurile pare înconjoară triunghiul într-un sens, iar cele impare, în sens opus.)

Care este legătura acestei probleme cu jocul lui Hamilton? Pentru a explica legătura, trebuie să considerăm întîi un turn din numai trei discuri pe care le vom numi, de la vîrf spre bază, A, B și C. Urmînd procedeul de mai sus, rezolvăm jocul mutînd discurile în următoarea ordine: $ABACABA$.

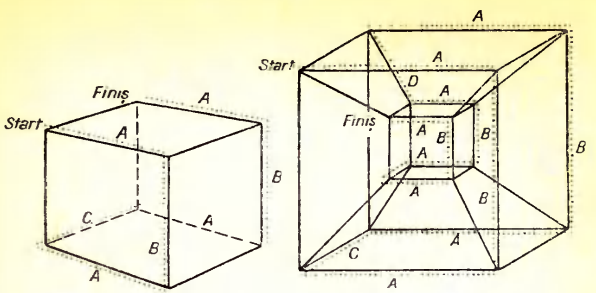


Fig. 25 În stînga, un drum hamiltonian este trasat în lungul muchiilor unui cub. Acesta are coordonatele A,B și C; drumul le parcurge în ordinea *ABACABA*. În dreapta, un drum hamiltonian este trasat în lungul muchiilor unui cub cuadridimensional, proiectat în trei dimensiuni. Acest cub are coordonatele A, B, C și D; parcursul este *ABACABADABACABA*. Aceasta corespunde ordinii transferării unui turn din Hanoi cu patru discuri.

Să notăm acum cu A, B și C cele trei coordonate ale unui hexaedru regulat, numit în mod obișnuit cub (vezi ilustrația din fig. 25, stînga). Dacă trasăm un drum în lungul muchiilor cubului, alegînd coordonatele în ordinea *ABACABA*, drumul va forma un circuit hamiltonian! Crowe și-a dat seama că aceasta se poate generaliza astfel: ordinea transferării a n discuri din turnul din Hanoi corespunde exact cu ordinea coordonatelor, dacă trasăm un drum hamiltonian pe un cub n dimensional.

O altă ilustrare va lămuri chestiunea. Deși nu putem confecționa un model al unui cub cuadridimensional (numit hipercub), putem proiecta rețeaua muchiilor sale pe modelul tridimensional reprodus în fig. 25, dreapta. Această rețea este topologic identică cu rețeaua muchiilor unui cub. Coordonatele le numim A, B, C și D, coordonata D fiind reprezentată de liniile diagonale.

Ordinea pentru a transfera un turn din patru discuri este *ABACABADABACABA*. Dacă parcurgem modelul hipercubului, făcînd ca drumul nostru să corespundă acestui șir, constatăm că am trasat un drum hamiltonian. Pe baza aceleiași scheme, cinci discuri

	D	C	B	A	
1	O	O	O	I	A
2	O	O	I	O	B
3	O	O	I	I	A
4	O	I	O	O	C
5	O	I	O	I	A
6	O	I	I	O	B
7	O	I	I	I	A
8	I	O	O	O	D

Fig. 26 Tabel de numere binare.

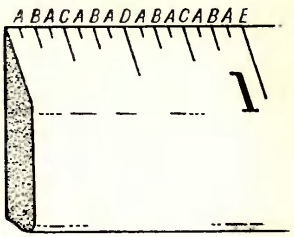


Fig. 27 Diviziunile binare ale unui țol.

se transferă într-o ordine corespunzătoare unui circuit hamiltonian pe un hipercub 5-dimensional, șase discuri corespund unui hipercub 6-dimensional etc.

ADAOS

Demonstrația că n discuri ale turnului din Hanoi pot fi trecute pe o altă vergea în 2^n-1 etape nu este grea și constituie un foarte bun exercițiu școlar pentru inducția matematică. (Vezi *Mathematics Teacher*, vol. 44, p. 505, 1951; și vol. 45, p. 522, 1952). Jocul se generalizează cu ușurință pentru orice număr de vergele. (Vezi cartea lui Ernest Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, 1907, problema nr. 1, și „American Mathematical Monthly" martie, 1941, problema nr. 3918.)

Izomorfismul dintre soluția turnului din Hanoi și drumul hamiltonian pe cuburi și hipercuburi nu este, poate, atît de surprinzător, dacă ne dăm seama că, în ambele cazuri, șirul de mutări este un model familiar pentru oricine lucrează cu calculatoare binare. Scriem întîi numerele binare de la 1 la 8 și denumim coloanele

A,B,C,D, așa cum se arată în fig. 26. Scriem apoi, de cealaltă parte a fiecărei linii, litera care identifică cifra „1", care este cea mai apropiată de marginea din dreapta a fiecărei linii. Înșiruirea acestor litere de sus în jos ne va da modelul căutat.

Această schemă se întîlnește frecvent în enigmele matematice. Cartoanele pentru ghicirea unui număr și un vechi joc mecanic, numit inelele chinezești, sînt alte două exemple pentru aceasta. Cazul cel mai cunoscut al aplicării acestui model este șirul de subdiviziuni ale unui segment de un țol pe o riglă obișnuită (fig. 27). Schema se obține, natural, prin diviziunea binară consecutivă a țolului în jumătăți, sferturi, optimi și șaisprezecimi.

Capitolul 7 MODELE TOPOLOGICE CURIOASE

După cum se ştie, o bandă Moebius este o curiozitate geometrică, cu o singură suprafaţă şi o singură muchie. Astfel de figuri formează obiectul unui capitol al matematicii, numit topologie. Cei care se interesează doar ocazional de matematică ar putea avea impresia că topologul este un matematician care se joacă, pierzîndu-şi timpul cu confecţionarea de benzi Moebius şi a altor modele topologice amuzante. Dacă ei ar deschide un manual de topologie recent, ar avea o surpriză. Ei ar găsi pagini pline de simboluri, care se succed una după alta şi care cuprind arareori o ilustraţie sau o diagramă. Este adevărat că topologia s-a dezvoltat din considerarea unor jocuri geometrice, dar astăzi ea a devenit o adevărată teorie abstractă. Topologul este bănuitor faţă de teoremele care trebuie intuite pentru a putea fi înţelese.

Totuşi, studii serioase de topologie dau la iveală un torent continuu de modele curioase şi amuzante. Să considerăm, de exemplu, banda Moebius dublă. Ea se obţine, împreunînd două fîşii de hîrtie şi imprimîndu-le o semirăsucire, ca şi cum ar fi o singură fîşie, după care reunim capetele lor, aşa cum se arată în fig. 28.

Avem acum ceea ce apare ca două benzi Moebius băgate una în alta. În adevăr, puteţi „demonstra" că sînt două benzi separate, introducînd degetul între benzi şi făcîndu-l să parcurgă tot drumul în jurul lor, pînă cînd reveniţi la punctul de plecare. O insectă care ar umbla între benzi ar putea circula la infinit între ele, umblînd în lungul unei singure benzi şi avînd-o pe cealaltă la spate. Nu va fi nici un punct în care ea să constate că „podeaua" se întîlneşte cu „tavanul". O insectă inteligentă ar trage concluzia că se plimbă între suprafeţele a două benzi separate.

Să presupunem însă că insecta a făcut un semn pe podea şi că a mers în jurul benzilor pînă cînd a revenit la semn. Ea nu va regăsi semnul pe podea, ci pe tavan şi va trebui să facă o a doua

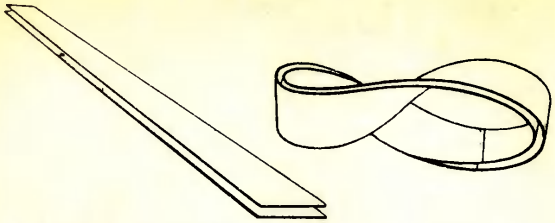


Fig. 28 Banda Moebius dublă se confecţionează, punînd împreună două fîşii de hîrtie (stînga), împrimîndu-le ambelor o semirăsucire şi lipind capetele, cum se vede în dreapta.

călătorie în jurul benzilor, pentru a-l găsi din nou pe podea! Insecta ar avea nevoie de foarte multă imaginaţie pentru a sesiza că atît podeaua cît şi tavanul sînt o singură parte a unei singure benzi. Ceea ce apare ca două benzi băgate una în cealaltă este, în realitate, o singură bandă mare! O dată ce aţi deschis modelul ca să formaţi banda mare, veţi constata că este o treabă destul de încurcată să-i redaţi forma iniţială.

Cînd banda este în forma ei dublă, două muchii separate ale ei merg paralel; ele înconjoară modelul de două ori. Închipuiţi-vă că cele două muchii sînt reunite şi că banda este confecţionată din cauciuc subţire. Veţi avea atunci un tub, care poate fi umflat, pentru a da un tor (termenul din topologie pentru suprafaţa unui covrig). Muchiile lipite vor forma o curbă închisă care se încolăceşte de două ori în jurul torului. Aceasta înseamnă că un tor poate fi tăiat în lungul unei astfel de curbe, pentru a forma o bandă Moebius dublă.

În fapt, banda dublă este identică cu una simplă căreia i-am imprimat patru semirăsuciri, înainte de a-i reuni capetele. Putem tăia un tor, astfel încît să se transforme într-o bandă cu orice număr par dorit de semirăsuciri, dar este imposibil să-l tăiem astfel încît să obţinem benzi cu un număr impar de semirăsuciri. Aceasta, pentru că torul este o suprafaţă cu două feţe, şi numai benzile cu număr par de semirăsuciri au două feţe. Deşi putem obţine suprafeţe cu două feţe din altele cu o singură faţă, reciproca nu este posibilă. Dacă vrem să căpătăm benzi cu o singură faţă (benzi cu număr impar de semirăsuciri) prin tăierea unei

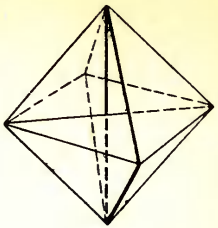
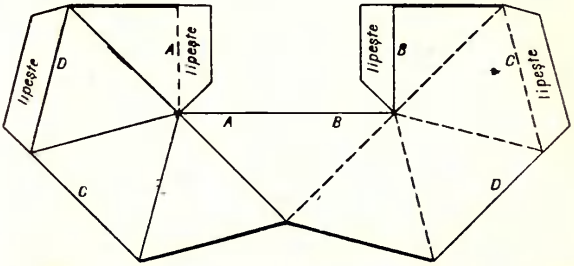


Fig. 29 Banda Moebius cu muchie triunghiulară a fost inventată de Bryant Tuckerman. Dacă redesenăm figura de jos, preferabil la scară mai mare, modelul poliedral din dreapta sus poate fi construit după cum urmează. Întîi, decupați figura și îndoiți-o „în jos" în lungul liniilor pline. Apoi îndoiți-o în sens opus în lungul liniilor întrerupte. După aceea, aplicînd lipici pe cele patru porțiuni marcate, reuniți muchiile *A* cu *A*, *B* cu *B*, *C* cu *C*, *D* cu *D*. Liniile groase trasează, pe poliedrul gata confecționat, frontiera triunghiulară a benzii Moebius.



suprafețe fără muchii, trebuie să recurgem la secționarea unei butelii Klein (o suprafață închisă cu o singură față și fără muchii), care poate fi secționată în două benzi Moebius, una fiind oglindirea celeilalte.

Banda Moebius simplă se obține imprimînd unei fîșii o semirăsucire și reunindu-i apoi capetele. Poate fi banda întinsă în așa fel încît muchia ei să fie un triunghi? Răspunsul este: da. Primul care a imaginat un astfel de model a fost Bryant Tuckerman, unul dintre cei patru pionieri ai artei împăturirii flexagoanelor (cap. 1). În figura 29 se arată cum poate fi tăiată, îndoită și lipită o foaie de hîrtie, pentru a realiza un model Tuckerman.

Ceea ce deosebește suprafețele între ele nu este numai faptul că pot avea o față sau două; ele pot diferi topologic și în ceea ce privește numărul și structura muchiilor lor. Aceste trăsături nu pot fi alterate prin deformarea suprafeței; de aceea, ele se numesc

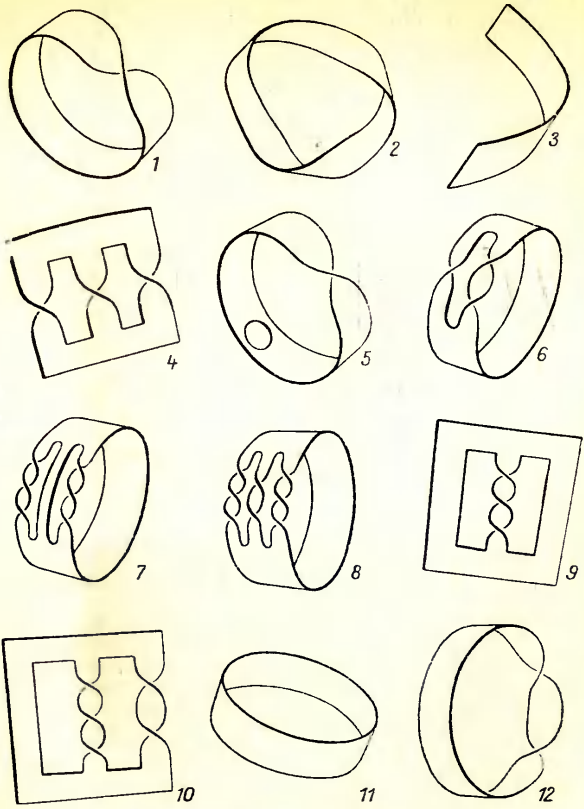
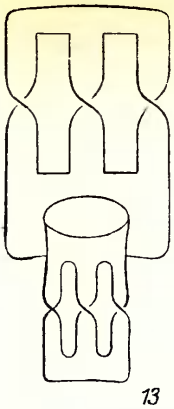
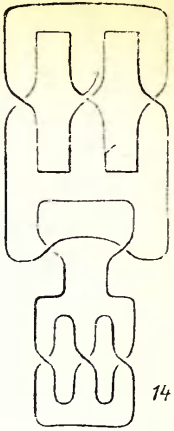
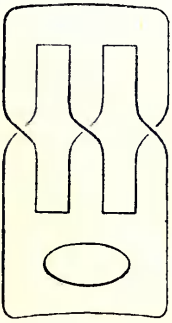


Fig. 30 Modele de hîrtie ale suprafeţelor 1-12.







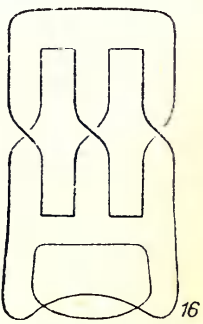


Fig. 31 Modele de hîrtie ale suprafetelor 13-16.

invarianți topologici. Să considerăm suprafețe care nu au mai mult de două muchii, și muchii care sînt fie curbe închise simple, fie de forma unui nod simplu obișnuit. Dacă suprafața are două muchii, acestea pot fi independente sau legate între ele. În cadrul acestor limite, putem face lista următoarelor 16 feluri de suprafețe (excluzînd suprafețele fără muchii, cum sînt sfera, torul și butelia Klein):

O față, o muchie

1. Muchia este o curbă închisă simplă.
2. Muchia este înnodată.

Două fețe, o muchie

3. Muchia este o curbă închisă simplă.
4. Muchia este înnodată.

O față, două muchii.

5. Ambele muchii sînt curbe închise simple, neînlănțuite.
6. Ambele muchii sînt curbe închise simple, înlănțuite.
7. Ambele muchii sînt înnodate, neînlănțuite.
8. Ambele muchii sînt înnodate, înlănțuite.
9. O muchie este simplă; una înnodată, neînlănțuită.
10. O muchie este simplă; una înnodată, înlănțuită.

Două fețe, două muchii

11. Ambele muchii sînt curbe închise simple, neînlănțuite.
12. Ambele muchii sînt curbe închise simple, înlănțuite.
13. Ambele muchii sînt înnodate, neînlănțuite.
14. Ambele muchii sînt înnodate, înlănțuite.
15. O muchie este simplă: una înnodată, neînlănțuită.
16. O muchie este simplă: una înnodată, înlănțuită.

Se pot construi ușor modele de hîrtie care să ilustreze fiecare dintre aceste șaisprezece suprafețe. Modelele pentru suprafețele 1 pînă la 12 sînt redate în fig. 30. Modelele celorlalte patru suprafețe sînt arătate în fig. 31.

Dacă unele dintre aceste modele sînt tăiate cu foarfecele într-un mod determinat, rezultatele sînt uluitoare. Aproape oricine s-a distrat cu o bandă Moebius știe că secționarea benzii în două, de-a lungul, nu produce două benzi separate, cum ne-am putea aștepta, ci o singură bandă mare. (Banda cea mare are patru semirăsuciri; deci ea poate fi transformată în banda Moebius dublă, descrisă mai sus.) Mai puțin binecunoscut este faptul că dacă începeți să tăiați

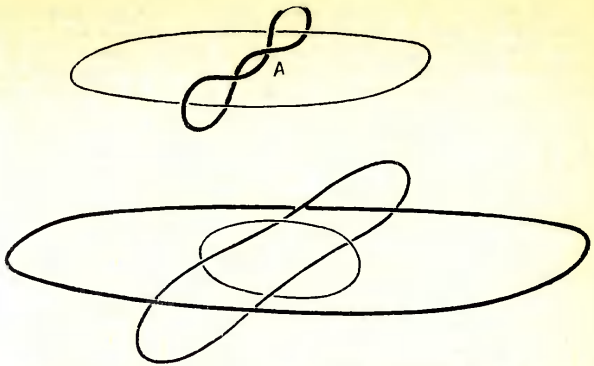


Fig. 32 Curbe înlănțuite care pot fi separate fără a o trece pe una prin deschicerea celeilalte. Curbele de sus pot fi separate trecînd curba răsucită prin ea însăși, în punctul A.

de la o treime din distanța dintre cele două muchii și continuați pînă ajungeți la punctul de plecare, banda Moebius se deschide într-una mare, înlănțuită cu una mai mică.

Dacă tăiem în jumătate suprafața 12 obținem două benzi înlănțuite între ele, de aceeași mărime, care sînt fiecare copia exactă a celei inițiale. Secționarea suprafeței 2 la jumătate dă o bandă mare cu un nod. Acest din urmă tur de forță a constituit subiectul unei cărțulii care s-a bucurat de mult succes la Viena, prin anul 1880. Cărțulia dezvăluia secretul de a forma un nod într-o bandă de stofă, fără a recurge la trucuri de scamator.

Cînd spunem că două muchii sînt „înlănțuite", înțelegem că sînt legate ca verigile într-un lanț. Pentru a separa verigile, trebuie să deschidem una dintre ele și s-o trecem pe cealaltă prin deschidere. Este însă posibil să legăm între ele două curbe închise, în așa fel încît, pentru a le despărți, nu este necesar să o trecem pe una prin deschiderea celeilalte. Metoda cea mai simplă pentru a realiza aceasta este arătată de curbele din partea de sus a fig. 32. Aceste curbe pot fi separate dacă trecem o bandă prin *ea însăși*, în punctul A.

Cele trei curbe închise din partea de jos a ilustrației sînt și ele inseparabile, fără să fie înlănțuite. Dacă îndepărtați una dintre curbe, celelalte două devin libere; dacă înlănțuiți două dintre ele, devine liberă a treia. În treacăt fie zis, această structură este topologic identică cu o cunoscută marcă cu trei inele a unei fabrici de bere. Aceste inele sînt numite cîteodată borromeene, deoarece ele figurau pe stema familiei Borromeo din timpul Renașterii italiene. Nu cunosc nici un model de hîrtie al unei suprafețe fără autointersecții, care să aibă două sau mai multe muchii angrenate, însă neînlănțuite, dar poate că un cititor inteligent va reuși să construiască vreuna.

ADAOS

Se poate confecționa un interesant model al benzii Moebius duble, dintr-un material plastic rigid. Aceasta ușurează plimbarea degetului pe tot drumul dintre cele „două" benzi.

Mel Stover din Winnipeg ne-a scris că a făcut un model din plastic alb flexibil, apoi a introdus o fîșie de plastic roșu printre „ele". Deoarece se vede limpede că fîșia roșie se situează cu toate punctele între ceea ce apare ca fiind cele două benzi separate, surpriza este mărită cînd scoatem banda roșie iar fîșia albă se arată a fi o singură bandă. Banda roșie trebuie să aibă capetele deschise și să se încalece puțin între ele, mai curînd decît să fie reunite, căci altfel ea se va înlănțui pe banda albă și nu va mai putea fi scoasă.

Fîșia roșie din modelul lui Stover, o dată așezată în interiorul fîșiei albe, ia forma unei benzi Moebius. Orice suprafață neorientabilă (unilateră) poate fi acoperită într-un mod similar prin ceea ce a primit numele de suprafață bilateră „cu două foi". De exemplu, butelia Klein poate fi acoperită complet de un tor din care o jumătate trebuie răsucită spre interior. La fel ca la acoperirea benzii Moebius, această suprafață apare ca două suprafețe separate, una în interiorul celeilalte. Dacă o înțepați într-un punct, constatați că suprafața interioară este separată de cea exterioară a buteliei Klein, deși suprafața interioară și cea exterioară sînt părți ale aceluiași tor (vezi David Hilbert și S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, traducerea în l. engleză, 1956, p. 313).

JOCUL HEX

Astăzi este ceva în genul unui eveniment, dacă cineva inventează un joc matematic, și nou, și interesant. Un astfel de joc este hex, introdus acum 15 ani la Institutul de fizică teoretică „Niels Bohr" din Copenhaga. Este foarte posibil ca el să devină unul dintre noile jocuri matematice cele mai practicate și mai complet analizate ale secolului.

Hex se joacă pe o tablă în formă de romb, compusă din hexagoane (fig. 33). Numărul de hexagoane poate varia, dar, de obicei, tabla are cîte 11 pe fiecare latură. Două laturi opuse ale rombului sînt etichetate „negru"; celelalte două laturi sînt „albe". Hexagoanele de la vîrfurile rombului aparțin ambelor laturi. Un jucător are un număr de piese negre, celălalt, un număr de piese albe. Jucătorii așază alternativ cîte una dintre piesele lor într-unul din hexagoane, cu condiția ca celula respectivă să nu fie ocupată de o altă piesă. Obiectivul lui „negru" este de a completa un lanț neîntrerupt de piese negre între cele două laturi etichetate „negru". „Albul" încearcă să realizeze un lanț similar de piese albe între laturile etichetate „alb".

Lanțul poate să se încovoaie și să cotească după voie; în fig. 33, este dat un exemplu de lanț cîștigător. Jucătorii continuă să-și așeze piesele pînă cînd unul dintre ei a făcut un lanț complet. Jocul nu poate avea un rezultat nedecis, deoarece un jucător îl poate bloca pe celălalt numai completîndu-și propriul său lanț. Regulile sînt simple, și totuși hex este un joc de o surprinzătoare subtilitate matematică.

Inventatorul lui hex este Piet Hein, care trebuie să fie, cu siguranță, unul dintre oamenii cei mai remarcabili ai Danemarcii. Și-a început cariera ca student la Institutul de fizică teoretică: apoi invențiile sale industriale l-au îndrumat spre inginerie, activitate în care a rămas pînă cînd a fost invadată Danemarca, în 1940. Deoarece era șeful unui grup antinazist, Hein a fost nevoit să treacă

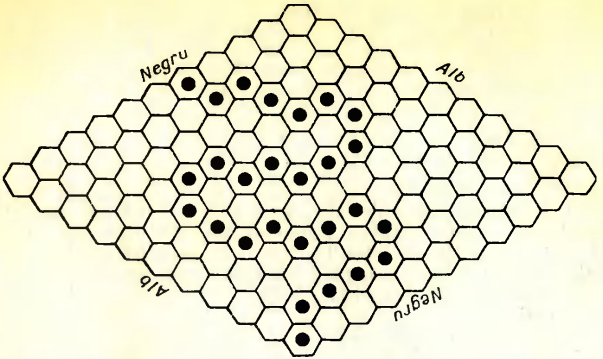


Fig. 33 Un lanț câștigător pentru „negru" pe o tablă de hex cu 11 hexagoane pe fiecare latură.

în ilegalitate. După război, a devenit binecunoscut ca scriitor pe teme științifice și de altă natură lucrînd pentru „Politiken", unul din cele mai importante ziare ale Danemarcii. El este cunoscut și sub pseudonimul Kumbel, ca autor a numeroase volume de epigrame. Aceste cărți au atins un tiraj de 175 de mii de exemplare.

Jocul hex i-a venit în minte lui Hein pe cînd cerceta celebra teoremă a celor patru culori din topologie. (Teorema, nedemonstrată pînă în prezent, spune că patru culori sînt suficiente pentru a realiza orice hartă, astfel încît două țări colorate la fel să nu aibă o frontieră comună.) Hein a prezentat jocul în 1942, în cadrul unei conferințe pentru studenții institutului. La 26 decembrie a aceluiași an, „Politiken" publica o prezentare a jocului: el a devenit curînd foarte popular în Danemarca, sub numele de Poligon. S-au pus în vînzare blocuri de hîrtie pe care jocul se putea practica cu creionul, iar timp de mai multe luni „Politiken" a tipărit un număr de probleme de poligon, cu premii pentru cele mai bune soluții.

În 1948, John F. Nash, pe atunci licențiat în matematică al Universității Princeton (astăzi profesor la Institutul tehnologic din Massachusetts și unul dintre cele mai mari somități americane în domeniul teoriei jocurilor), a reinventat jocul în mod independent.

El a captivat repede pe studenții în matematică de la universitate și de la Institutul de înalte studii din Princeton. Jocul era numit, de regulă, Nash sau John, acest din urmă nume datorîndu-se faptului că era adesea jucat pe dalele hexagonale care pardosesc sălile de baie. El nu și-a căpătat numele de hex decît în 1952, cînd o variantă a jocului a fost pusă în vînzare sub acest titlu, de firma Parker Brothers.

Cititorii care ar vrea să-și încerce puterile cu jocul hex sînt sfătuiți să-și facă copii heliografice ale tablei. Pe acestea se poate juca, marcînd hexagoanele cu cerculețe și cruciulițe. Dacă preferați să jucați cu piese mobile pe o tablă permanentă, mare, aceasta se poate confecționa ușor, desenînd-o pe un carton gros sau lipind împreună piese hexagonale. Dacă acestea sînt destul de mari, se pot folosi perfect piese de șah.

Una dintre cele mai bune metode de a învăța subtilitățile jocului hex constă în a începe cu o tablă cuprinzînd un număr mic de hexagoane. Dacă jucăm hex pe o tablă de 2 × 2 (patru hexagoane), jucătorul care face prima mutare cîștigă evident. Cu o tablă de 3 × 3, primul jucător cîștigă ușor, dacă face prima mutare în centru (fig. 34). Deoarece „negrul" are un joc dublu de ambele părți ale piesei sale, nu există nici o cale pe care oponentul său să-l împiedice de a cîștiga la a treia mutare.

Cu o tablă de 4 × 4 lucrurile încep să se complice. Primul jucător cîștigă sigur, dacă ocupă imediat oricare dintre cele patru celule numerotate în fig. 35. Dacă deschide în orice altă parte, el poate fi totdeauna învins. Deschiderea în celulele 2 sau 3 asigură cîștigul la mutarea a cincea; dacă deschide în celula 1 sau 4, cîștigă la mutarea a șasea.

În cazul unei table de 5 × 5, se poate demonstra că, dacă primul jucător ocupă imediat hexagonul din centru, el poate cîștiga la a

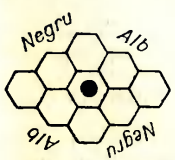


Fig. 34

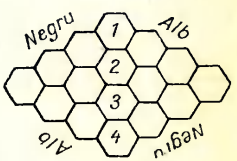


Fig. 35

șaptea mutare. Cu table mai mari, analiza devine imens de grea. Natural, tabla standard, de 11 × 11, introduce un număr de complicații atît de imens, încît analiza completă pare să depășească domeniul posibilităților de calcul ale omului.

Specialiștii în teoria jocurilor consideră că hex este deosebit de interesant, din următorul motiv. Deși nu se cunoaște un „procedeu decisiv" care să asigure cîștigul în cazul unei table standard, s-a dat o elegantă „demonstrație de existență", prin reducere la absurd, afirmîndu-se că există o strategie cîștigătoare pentru primul jucător, pe o tablă de indiferent ce mărime! (O demonstrație de existență se mărginește să dovedească existența a ceva, fără a spune în ce fel trebuie să procedăm pentru a descoperi acest ceva.) În cele ce urmează prezentăm o variantă extrem de concentrată a demonstrației (ea poate fi formulată cu mult mai multă rigoare), așa cum a fost elaborată de John Nash, în 1949:

1. Ori primul, ori al doilea jucător trebuie să cîștige, drept care trebuie să existe o strategie cîștigătoare, fie pentru primul jucător, fie pentru al doilea.

2. Să presupunem că al doilea jucător are o strategie cîștigătoare.

3. Primul jucător poate adopta însă următoarea defensivă. El face întîi o mutare arbitrară. După aceea, el joacă după strategia cîștigătoare a celui de-al doilea jucător, presupusă mai sus. Pe scurt, el devine cel de-al doilea jucător, dar cu o piesă în plus, așezată undeva pe tablă. Dacă, în timp ce realizează strategia, el trebuie să joace în celula unde și-a făcut prima mutare arbitrară, el face o altă mutare arbitrară. Dacă, mai tîrziu, el este nevoit să joace unde a făcut a doua mutare arbitrară, el face o a treia mutare arbitrară, și așa mai departe. Astfel el realizează strategia cîștigătoare, avînd totdeauna pe tablă o piesă în plus.

4. Această piesă în plus nu poate împieta imitația de strategie cîștigătoare, realizată de primul jucător, deoarece piesa în plus este totdeauna un avantaj și niciodată un handicap. De aceea, primul jucător poate să cîștige.

5. Deoarece am contrazis acum ipoteza noastră că există o strategie cîștigătoare pentru al doilea jucător, sîntem nevoiți să renunțăm la această ipoteză.

6. În consecință, trebuie să existe o strategie cîștigătoare pentru primul jucător.

Există mai multe variante pe tema de bază a lui hex, printre care una, unde fiecare jucător încearcă să-l silească pe adversarul său să realizeze un lanț. Potrivit unei demonstrații ingenioase a lui Robert

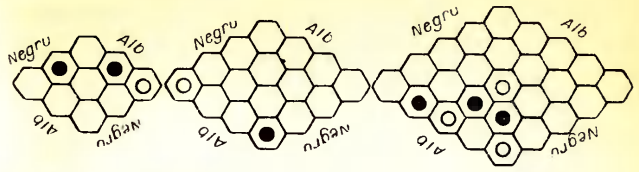


Fig. 36 Trei probleme de hex.

Winder, licențiat în matematică al Universității din Princeton, primul jucător poate cîștiga totdeauna, în cazul cînd tabla are un număr par de celule pe fiecare latură, iar al doilea jucător poate cîștiga totdeauna, cînd tabla are un număr impar.

După ce cititorul a făcut un timp exerciții cu jocul hex, el ar putea dori să-și încerce forțele cu trei probleme propuse de Hein. Acestea sînt reprezentate în cele trei desene din fig. 36. Obiectivul celor trei probleme este de a găsi prima mutare care să asigure cîștigul pentru „alb".

ADAOS

Hex se poate juca pe mai multe tipuri diferite de cîmpuri, care sînt topologic echivalente cu cîmpul de hexagoane. De exemplu, se poate folosi un cîmp de triunghiuri echilaterale, așezînd fisele la intersecții. O tablă de șah obișnuită este izomorfă cu un cîmp de hex, dacă presupunem că pătratele se leagă între ele diagonal, după o singură direcție (să zicem NE și SV, dar nu NV și SE). Ambele table par mai puțin satisfăcătoare pentru un joc real decît un mozaic de hexagoane.

S-au propus pentru hex diverse forme ale cîmpului, diferite de cea rombică. De exemplu, Claude Shannon de la Institutul tehnologic din Massachusetts a sugerat un cîmp de forma unui triunghi echilateral. Cîștigătorul este cel care completează primul un lanț legînd toate trei laturile triunghiului. Celulele din vîrf sînt considerate ca aparținînd ambelor laturi. Demonstrația lui Nash pentru cîștigul primului jucător se aplică în aceeași măsură și la această variantă.

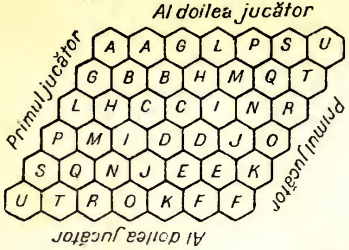


Fig. 37 Cum împerechează al doilea jucător celulele pentru a cîştiga pe o tablă „scurtă."

S-au făcut mai multe propuneri pentru a contracara puternicul avantaj al primului jucător în varianta de hex standard. I se poate interzice primului jucător să deschidă pe diagonala mică. Cîştigătorul poate fi oprit să facă la început numărul mic de mutări de care are nevoie pentru a cîştiga. Primul jucător deschide cu o mutare, după care fiecare jucător are alternativ cîte două mutări.

Este ispititor să presupunem sau să ne închipuim că pe o tablă de $n \times (n + 1)$ (de exemplu, de 10×11), la care primul jucător ocupă laturile mai îndepărtate, avantajul relativ al celor doi jucători s-ar putea oarecum egaliza. Din păcate, s-a descoperit o strategie simplă, care dă celui de-al doilea jucător un cîştig cert. Strategia implică o simetrie de oglindire faţă de o axă centrală. Dacă sînteţi al doilea jucător, vă închipuiţi celulele ca fiind împerecheate conform schemei indicate de literele din fig. 37. Ori de cîte ori adversarul joacă, jucaţi celula marcată cu aceeaşi literă. Dată fiind distanţa mai mică dintre laturi, este imposibil să pierdeţi!

Cîteva cuvinte despre strategia generală în jocul hex. Numeroşi cititori ne-au scris că au rămas nedumeriţi, descoperind că primul jucător poate cîştiga uşor, pur şi simplu luînd celula centrală şi întinzînd apoi un lanţ de celule alăturate spre cele două laturi corespunzătoare ale tablei. Ei susţin că, deoarece primul jucător are totdeauna alegerea a două celule pentru veriga următoare a lanţului, este imposibil ca el să fie blocat. Firește, ei nu au jucat destul de mult pentru a descoperi că lanţurile pot fi blocate, luînd celulele nevecine dinspre capetele lanţului. Jocul este mult mai subtil decît pare la început. Blocajul efectiv presupune adesea un joc care să nu aibă legătură cu lanţul ce urmează a fi blocat.

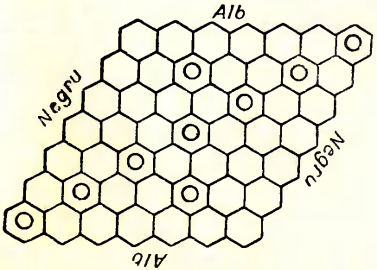
O strategie mai complicată este bazată pe următorul procedeu. Jucați întîi centrul, apoi căutați să formați de fiecare parte un lanț din verigi separate care sînt fie diagonale, fie verticale, ca cele două lanțuri reprezentate în fig. 38. Dacă adversarul vă contracarează vertical, treceți la jocul diagonal, iar dacă vă atacă diagonal, treceți la verticală. Firește, dacă ați reușit să reuniți cele două laturi cu un lanț întrerupt unde fiecare verigă lipsă este un dublu joc, nu mai puteți fi blocat. Este o bună strategie într-un joc cu novici, dar ea poate fi combătută prin mutări defensive convenabile.

O strategie cu totul diferită a stat la baza unei mașini de hex, construită de Claude Shannon și E.F. Moore, pe cînd erau amîndoi în serviciul lui Bell Telephone Laboratories. Iată descrierea dată de Shannon, în articolul său despre „Calculatoare și automate", publicat în „Proceedings of the Institute of Radio Engineers", vol. 41, octombrie, 1953:

„După cercetarea jocului, am ajuns la concluzia că se poate efectua o mutare destul de bună prin următorul procedeu. Un cîmp de potențial bidimensional joacă rolul tablei, cu piesele albe ca sarcini pozitive și cu piesele negre ca sarcini negative. Laturile de sus și de jos ale tablei sînt negative iar celelalte două, pozitive. Mutarea care urmează a fi făcută corespunde unui punct șa bine determinat în acest cîmp.

Pentru a verifica această strategie, am construit un dispozitiv analogic, constînd dintr-o rețea de rezistențe și din mici piese mobile pentru a localiza punctele șa. Principiul general s-a dovedit a fi rezonabil, cu unele ajustări sugerate de experiență. Cînd avea prima

Fig. 38



mutare, mașina a cîștigat aproximativ 70% din jocuri împotriva unor adversari umani. Dispozitivul i-a surprins adesea pe constructori alegînd mutări care păreau ciudate și care, analizate, se dovedeau bune. În mod normal, gîndim despre mașinile de calcul că sînt experte în cazul unor calcule lungi și încîlcite, dar slabe în judecățile de valoare generalizate. În mod paradoxal, aprecierile poziționale ale acestor mașini erau bune; principala lor slăbiciune consta în jocul combinatoriu de la sfîrșit. Este, de asemenea, curios că mașina de hex a inversat procedeul de calcul uzual, rezolvînd o problemă eminamente numerică cu o mașină analogică".

Ca să se distreze, Shannon a construit și o mașină de hex care avea a doua mutare și cîștiga totdeauna, spre nedumerirea hexperților, care erau conștienți de puternicul avantaj al primului jucător. Tabla era mai scurtă după o direcție (7×8) dar montată într-o cutie dreptunghiulară, astfel încît inegalitatea laturilor era camuflată. Prea puțini jucători au fost destul de bănuitori pentru a număra celulele de-a lungul fiecărei laturi. Natural, mașina juca strategia reflectată cîștigătoare, descrisă mai sus. Ea putea fi construită în așa fel încît să răspundă instantaneu la mutări, dar s-au utilizat termistori pentru a-i încetini funcționarea. Ea avea nevoie de una pînă la opt secunde pentru a lua o decizie, dînd astfel impresia că efectuează o complicată analiză a configurației cîmpului!

RĂSPUNSURI

Răspunsurile la cele trei probleme de hex din fig. 36 sînt date în fig. 39. O analiză completă a modurilor de joc posibile ar cere prea mult spațiu: cruciulițele indică numai prima mutare corectă pentru „alb".

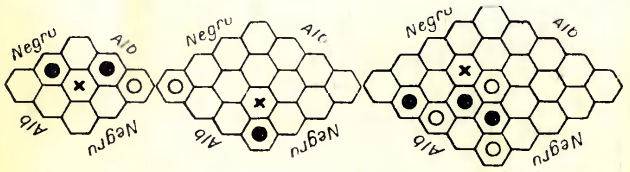


Fig. 39

Mai mulți cititori și-au exprimat părerea că, în problema a treia, „albul" ar putea să cîștige și jucînd pe celula 22 (începeți din extrema stîngă și numerotați celulele din fiecare șir, spre dreapta, de la 1 la 25). Însă, așa cum a subliniat Robert Fox de la Princeton, „negrul" poate zădărnici aceasta prin ocuparea celulei 18. Dacă „albul" ocupă celula 23, „negrul" cîștigă ocupînd celula 20. Dacă „albul" ocupă celula 8, „negrul" cîștigă ocupînd celula 14.

Capitolul 9

SAM LOYD, CEL MAI MARE ENIGMIST AL AMERICII

Numele lui Sam Loyd nu este cunoscut, probabil, multor cititori ai acestei cărți, deși el a fost un autentic geniu american și un fel de celebritate a timpului său. În decursul unei jumătăți de secol aproape, pînă la moartea sa în 1911, el a fost regele național necontestat al jocurilor. Mii de jocuri superbe, cele mai multe dintre ele, matematice, au apărut sub numele său; multe dintre ele sînt populare și astăzi.

În fapt, au existat doi Sam Loyd: tatăl și fiul. După moartea bătrînului, tînărul a tăiat mențiunea „Jr." de la sfîrșitul numelui său și, dintr-un birou mic și obscur din Brooklyn, a continuat opera tatălui, colaborînd la rubricile de jocuri ale revistelor și ale ziarelor și publicînd cărți și noutăți. Însă fiul, care a murit în 1934, nu avea inventivitatea tatălui; cărțile sale sînt doar compilații făcute în grabă după opera tatălui.

Sam Loyd senior s-a născut la Philadelphia, în 1841, ca fiu al unor „părinți bogați, dar cinstiți" (cum s-a exprimat o dată). În 1844, tatăl său, agent de imobile, s-a mutat cu familia la New York, unde Sam a urmat cursurile școlii medii pînă la vîrsta de 17 ani. Dacă ar fi mers la universitate, el ar fi devenit, probabil, un eminent matematician sau inginer. Sam însă nu s-a înscris la colegiu. Unul dintre motive era că învățase să joace șah.

Se pare că, timp de 10 ani, Loyd nu a făcut altceva decît să mute figuri de șah pe o tablă. Pe vremea aceea, șahul se bucura de o popularitate enormă; numeroase ziare aveau rubrici de șah cu probleme propuse de cititori. Prima problemă a lui Loyd a fost publicată, pe cînd el avea 14 ani, de o gazetă din New York. În următorii cinci ani, producția sa de probleme de șah a fost atît de prodigioasă, încît a devenit cunoscut în întreaga lume șahistă. Pe cînd avea 16 ani, a fost numit redactor de probleme la revista „Chess Monthly", editată pe atunci de către D.W. Fiske și de tînărul maestru de șah Paul Morphy. Mai tîrziu, el a fost redactorul

mai multor rubrici de șah din ziare și colabora regulat, sub diverse pseudonime, la o mulțime de alte publicații.

În anii 1877 și 1878, Loyd scria o pagină de șah săptămînală pentru „Scientific American Supplement", începînd fiecare articol cu o vignetă inițială formată din piesele unei probleme de șah. Aceste rubrici au constituit cea mai mare parte din cartea sa *Chess Strategy*, pe care a publicat-o în 1878 în propria sa tipografie din Elizabeth, New Jersey. Această carte, care cuprinde 500 dintre problemele sale cele mai frumoase, este și astăzi foarte căutată de colecționari.

Problema de șah cea mai des retipărită a lui Loyd compusă pe cînd avea 18 ani ilustrează modul delicios în care-și îmbrăca întrebările sale într-o formă anecdotică. Se pare că, în 1713, pe cînd Carol al XII-lea al Suediei era asediat de turci în tabăra sa de la Bender, regele își petrecea adesea timpul jucînd șah cu unul dintre miniștrii săi. O dată, cînd jocul a ajuns la situația redată în fig. 40, Carol (care juca cu albele) a anunțat mat în trei mutări. În aceeași clipă, o ghiulea a făcut să zboare cît colo calul alb. Carol a studiat din nou tabla, a zîmbit și a zis că nu are nevoie de cal, deoarece va da mat în patru mutări. Nu terminase bine să spună aceasta, cînd o a doua ghiulea făcu să cadă pionul de lîngă ea. Netulburat, Carol își examină cu grijă poziția și anunță mat în cinci mutări.

Povestea are și o încheiere. După mulți ani, un șahist german a demonstrat că, dacă prima ghiulea ar fi distrus turnul alb în locul calu-

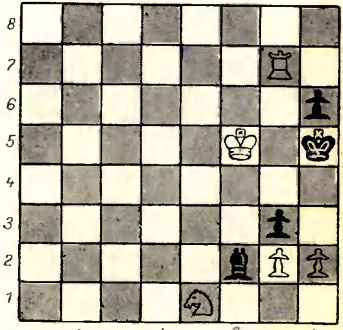


Fig. 40

lui, Carol ar fi dat mat în șase mutări. Cititorii care joacă șah ar putea să-și încerce forțele cu această remarcabilă problemă cvadruplă.

Versiunea originală a primului joc cu succes comercial, desenat de Loyd cu puțin înainte de a împlini 20 de ani, este reprezentată în fig. 41. Tăind jocul după liniile punctate, cele trei dreptunghiuri pot fi aranjate (fără îndoiri) în așa fel încît cei doi jochei să călărească cei doi măgari. P.T. Barnum a cumpărat de la Loyd milioane de exemplare din acest joc și le-a distribuit sub titlul „P.T. Barnum's Trick Donkeys". Se spune că tînărul Loyd a cîștigat cu acest joc 10 000 de dolari în cîteva săptămîni: jocul se bucură de popularitate și astăzi.

Din punct de vedere matematic, cea mai interesantă creație a lui Loyd este celebrul joc „14—15" sau „Boss". Acesta a înregistrat o renaștere surprinzătoare cu cîțiva ani înainte de 1950 și mai poate fi cumpărat la raioanele de jucării ale celor mai multe magazine

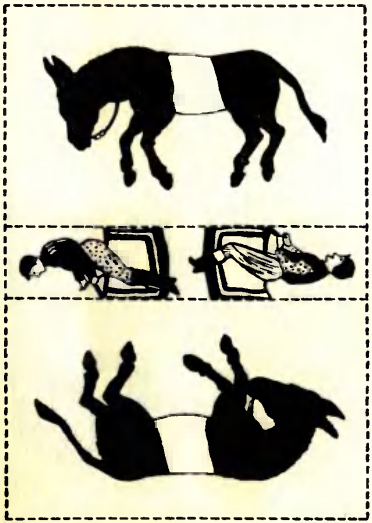


Fig. 41

cu mărfuri de 5 și 10 cenți. După cum se vede în fig. 42, 15 pătrățele numerotate pot aluneca liber în interiorul unei cutii. La începutul jocului, ultimele două numere sînt inversate. Problema constă în a mișca pătrățelele, fără a le scoate din cutie, pînă cînd toate se așază în ordine naturală, cu locul liber în colțul din dreapta jos, ca la început. În anii 1870, jocul 14—15 a avut o popularitate imensă, în Statele Unite și peste hotare, iar revistele de matematică au publicat despre el numeroase articole savante.

Loyd a oferit un premiu de 1 000 de dolari pentru o soluție corectă a jocului. Mii de oameni jurau că-l rezolvaseră, dar nimeni nu-și putea aminti destul de bine mișcările pentru a le descrie și a obține premiul. Oferta lui Loyd nu comporta nici un risc, deoarece problema nu poate fi rezolvată. Dintre cele peste 20 de trilioane de așezări posibile ale pătrățelelor, exact o jumătate se realizează prin lunecarea pătrățelelor din așezarea reprezentată aici. Pozițiile celelalte, inclusiv cea căutată, au o „paritate" diferită (ca să folosim limbajul matematic al permutărilor) și nu pot fi obținute dintr-o poziție cu paritate opusă.

Jocul se făcea uneori așezînd pătrățelele la întîmplare în cutie și căutînd apoi să li se dea ordinea naturală. Probabilitatea de a reuși este, firește, 1/2. O cale simplă pentru a stabili dacă o poziție B poate fi obținută dintr-o poziție A constă în a vedea cîte „interschimbări" (schimbînd poziția a două dintre pătrățele, prin scoaterea lor din cutie și prin reintroducerea lor) sînt necesare pentru a converti A în B. Dacă acest număr este par, A și B au aceeași paritate și una poate fi obținută din cealaltă prin lunecare.

Faptul că o singură interschimbare a două pătrățele inversează automat paritatea stă la baza unei variante deosebit de demonice a jocului, care a fost pusă în vînzare în urmă cu cîțiva ani. Aici pătrățelele nu sînt numerotate, ci marcate cu litere, cum se arată în fig. 43. RATE și YOUR sînt pe pătrățelele de o culoare, MIND

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Fig. 42

R	A	T	E
Y	O	U	R
M	I	N	D
P	A	L	

Fig. 43

Fig. 44 Paradoxul lui Loyd: „Teddy și leii". În stînga, avem șapte lei și

și PAL* pe pătrățelele de altă culoare. Arătați adversarului dv. această așezare, după care o distrugeți, mutînd pătrățelele la întîmplare încoace și încolo. Pe cînd faceți aceasta, manevrați cu șiretenie ca al doilea R să ajungă în colțul din dreapta sus, înainte de a preda jocul partenerului. Acesta va lăsa firește, ca acest R să stea în colț, în timp ce încearcă să ordoneze restul pătrățelelor, — un lucru imposibil, deoarece mutarea R-urilor a inversat paritatea. Maximul pe care-l poate obține bietul dv. adversar, va fi, cel mult, RATE YOUR MIND PLA.

Cel mai frumos joc al lui Loyd este, incontestabil, faimoasa „Desprindere de Pămînt", un paradox brevetat în 1896. Un cerc de carton, prins cu o țintă în centru de o bucată de carton pătrată, poartă în jurul marginii figurile a 13 războinici chinezi. O parte din fiecare războinic este desenată pe cerc și o parte pe pătrat.

* RATE YOUR MIND PAL — măsoară-ți inteligența, amice!

șapte vînători; în dreapta, opt lei și șase vînători.

Dacă rotim discul, părțile se întregesc altfel, și unul dintre războinici dispare cu totul! Acest joc a fost reprodus atît de frecvent, încît prezentăm în fig. 44 varianta cea mai puțin cunoscută, dar, într-un anumit sens mai încurcată, numită „Teddy și lei". Într-o poziție a discului, vedeți șapte lei și șapte vînători; în alta, opt lei și șase vînători. De unde apare al optulea leu? Ce vînător dispare și unde anume?

În 1914, la trei ani după moartea tatălui său, Loyd Jr. a publicat uriașa lucrare *Cyclopedia of Puzzles*, care este cu siguranță cea mai mare culegere de probleme strînse vreodată într-un volum. Enigma următoare este luată din această carte fabuloasă, de mult epuizată. Ea arată cu cîtă ingeniozitate reușea bătrînul maestru să ia o problemă simplă, care nu necesita decît priceperea de a gîndi clar și de a opera cu fracții, și să o dramatizeze în așa fel încît să devină o provocare care stîrnește ambiția de a o rezolva.

În Siam, spune Loyd, se cresc două soiuri de peşte pentru calităţile lor de luptători: un biban mare, alb, cunoscut ca peştele-rege, şi un crap mic, negru, numit peştele-diavol. Antipatia dintre aceste două specii este atît de mare, încît se atacă reciproc deîndată ce se văd, şi se bat pînă la moarte".

Un peşte-rege poate dispune cu uşurinţă de unul sau de doi peşti mici, exact în cîteva secunde. Însă peştii-diavol „sînt atît de agili şi colaborează atît de armonios, încît trei din aceşti peştişori egalează pe unul mare, şi pot lupta ore întregi fără nici un rezultat. Ei îşi realizează atît de raţional şi de ştiinţific tactica de atac, încît patru peştişori ucid un peşte mare exact în trei minute, iar un număr mai mare dă lovitura de graţie proporţional mai repede".

(Adică cinci peşti-diavol ucid un peşte-rege în 2 min şi 24 s, şase îl ucid în 2 min etc.)

Dacă opunem patru peşti-rege la 13 peşti-diavol, care tabără va ciştiga lupta şi cît timp va dura, presupunînd, firește, că peştii cei mici cooperează în maniera cea mai eficace?

Pentru a evita o ambiguitate în enunţul lui Loyd, trebuie să clarificăm că peştii-diavol atacă totdeauna un peşte-rege în grupuri de cîte trei sau mai mari şi rămîn în jurul peştelui cel mare pînă cînd îl învinge. De exemplu, nu avem voie să presupunem că, în timp ce 12 peştişori ţin în şah patru peşti mari, al treisprezecelea diavol înoată de colo-colo pentru a desăvîrşi uciderea peştilor mari, atacîndu-i pe toţi simultan. Dacă admitem, aşa-zicînd, ca fracţiuni de peşte-diavol să fie eficiente, putem raţiona că, în cazul cînd patru diavoli ucid un rege în 3 min, 13 diavoli vor termina cu un rege în 12/13 min, iar cu patru regi, în 48/13 min (3 min şi $41\frac{7}{13}$ s). Acest raţionament ne va duce însă la concluzia că 12 diavoli vor omorî un rege într-un minut şi patru regi în patru minute, chiar fără ajutorul celui de la treisprezecelea peştişor, o concluzie care contravine limpede ipotezei lui Loyd, că trei peşti mici sînt incapabili să ucidă un rege.

ADAOS

Arthur W. Burks, profesor de filozofie la Universitatea din Michigan, mi-a scris pentru a-mi comunica modul interesant în care jocul 14—15 al lui Loyd seamănă cu un calculator numeric actual. Fiecare are un număr finit de stări, fiecare stare fiind urmată de o altă

stare. Fiecare „cursă" a calculatorului sau a jocului 14—15 începe cu o anumită stare. Toate celelalte stări pot fi atunci împărțite în două clase: cele „admisibile", care pot fi realizate prin „funcționare", și stările „inadmisibile", care nu sînt realizabile. Chestiunea este discutată la p. 63 a cărții prof. Burks, *The Logic of Fixed and Growing Automata*, un memoriu publicat în 1957 de Institutul de studii inginerești al Universității din Michigan.

RĂSPUNSURI

În problema de șah, albul dă mat în trei mutări, luînd pionul cu tura. Dacă nebunul negru ia tura, albul își duce calul în f3, negrul este nevoit să-și mute nebunul și albul dă mat cu pionul în g4. Dacă negrul a luat calul în locul turei, tura albă dă șah în h3, negrul interpune nebunul și albul dă mat cu pionul în g4, ca și înainte.

După ce ghiuleaua a dat jos calul alb, albul dă mat în patru mutări, luînd pionul cu pionul său. Dacă negrul își mută nebunul în b6, albul mută tura în g4. Nebunul negru în d8 este urmat de tura albă în h4 + (șah). Nebunul ia tura și albul dă mat cu pionul în g4.

După ce ghiuleaua înlătură pionul alb în h2, albul dă mat în cinci mutări, cu tura în b7. Dacă negrul își mută nebunul în e5 (sau e3), atunci: (2) Tb1, Ne7 (sau Ng5); (3) Th1 + (șah), Nh4; (4) Th2, g3×h2: (5) g4 + mat. Dacă negrul joacă în prima mutare Ng1, atunci: (2) Td1, Nh2; (3) Te1, Rh4; (4) Rg6, orice mutare; (5) Te4 + mat.

Dacă prima ghiulea ar fi dat jos tura albă în locul calului, albul dă mat în șase mutări, ducînd calul în f3. Riposta cea mai bună a negrului este Ne1, care conduce la (2) Cf×e1, Rh4; (3) h3, Rh5; (4) Cd3, Rh4; (5) Cf4, h5; (6) Cg6 + mat.

Jocheii pot fi așezați pe cei doi măgari (care pornesc miraculos în galop), așa cum se arată în fig. 45. Figura 46 reproduce o sursă posibilă a faimosului joc al lui Loyd: un desen persan de pe la începutul secolului al XVII-lea.

Referitor la paradoxul „Teddy și leii", este lipsit de sens să ne întrebăm ce leu a dispărut și ce vînător a apărut din nimic. *Toți* leii și vînătorii dispar cînd rearanjăm părțile, pentru a forma o nouă mulțime de opt lei, fiecare mai mic cu 1/8 decît înainte, și de șase vînători, fiecare mai mare cu 1/6 decît înainte.

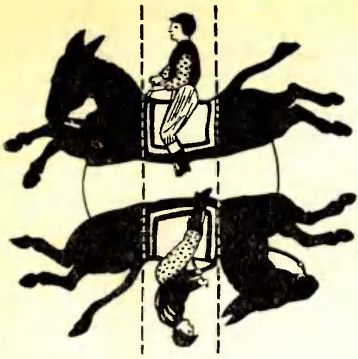
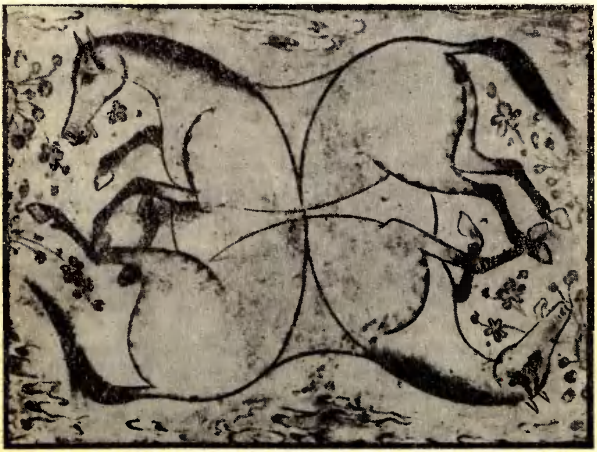


Fig. 45 Rezolvarea enigmei cu jocheii.

Fig. 46 Desen persan din secolul al XVII-lea (Muzeul de arte frumoase, Boston).



Există mai multe căi pentru a rezolva problema peștilor luptători. Iată aici redactarea caracteristică a soluției lui Loyd:

„Trei pești mici, cuplați cu fiecare dintre cei trei pești mari, le angajează atenția, în timp ce alți patru luptători mici îl termină pe al patrulea pește mare, exact în trei minute. Apoi cinci pești mici atacă un pește mare și-l ucid în 2 min 24 s; între timp, ceilalți pești mici luptă cu ceilalți mari.

Este evident că, dacă cele două grupuri rămase ar fi asistate de încă un luptător, ele ar termina totul în același timp, rămînînd suficientă rezistența fiecăruia dintre peștii mari pentru a atrage atenția unui pește mic pe timp de 2 min 24 s. De aceea, dacă acum atacă șapte în loc de unul, ei vor realiza aceasta într-o șeptime a acestui interval de timp, deci $20\frac{4}{7}$ s.

Divizînd forțele peștilor mici împotriva celor doi pești mari rămași — unul va fi atacat de șapte și celălalt de șase — ultimul pește va avea nevoie, la sfîrșitul celor $20\frac{4}{7}$ s, de lovitura pe care un pește mic i-o poate administra în acest timp. Toți cei 13 pești mici, concentrîndu-și atacul, vor omorî peștele într-o treisprezecime a acestui timp, adică $1\frac{53}{91}$ s.

„Adunînd totalurile timpului din aceste reprize — 3 min, 2 min 24 s, $20\frac{4}{7}$ s și $1\frac{53}{91}$ s —, obținem 5 min $46\frac{2}{13}$ s, ca timp total al luptei".

Capitolul 10

TRUCURI MATEMATICE CU CĂRȚI DE JOC

Scurta povestire „Domnul Știe-tot" a lui Somerset Maugham conține următorul dialog:

— Vă plac trucurile cu cărți de joc?

— Nu, am oroare de ele.

— Perfect, vă voi arăta îndată cîteva.

După al treilea truc, victima găsește o scuză și părăsește încăperea. Reacția ei este ușor de înțeles. Cele mai multe trucuri cu cărți de joc sînt niște eșecuri falimentare, cu excepția cazurilor cînd sînt efectuate de profesioniști îndemînatici. Există însă unele trucuri „automate" cu cărțile de joc, care sînt interesante din punct de vedere matematic.

Să luăm următorul truc. Scamatorul, așezat la masă în fața spectatorului, începe prin a întoarce 20 de cărți absolut oarecare în pachet. Aceasta înseamnă că el le pune în pachet cu fața în sus. Spectatorul amestecă bine pachetul, astfel încît aceste cărți să fie distribuite la întîmplare. După aceea, ținînd pachetul sub masă pentru ca să nu-l poată vedea nimeni, numără din pachet, de sus în jos 20 de cărți, pe care le dă, tot pe sub masă, scamatorului.

Scamatorul preia acest pachet mic, dar continuă să-l țină sub masă, astfel încît să nu poată vedea cărțile. „Nici eu, nici d-ta", spune el, „nu știm cîte cărți sînt întoarse în acest grup de 20 pe care mi l-ai înmînat. Dar este probabil că numărul acestor cărți este mai mic decît numărul de cărți întoarse din cele 32 pe care le ai în mînă. Fără să mă uit la cărțile mele, voi întoarce încă vreo cîteva cu fața în sus și voi încerca să fac în așa fel încît numărul de cărți întoarse din pachetul meu să fie exact egal cu cel din pachetul d-tale."

Scamatorul pipăie un timp cărțile, pretinzînd că le poate distinge cu degetele fața de spate. Apoi el scoate pachetul la vedere și-l întinde pe masă. Se numără cărțile întoarse cu fața în sus. Nu-

mărul lor se dovedește a fi identic cu numărul de cărți întoarse cu fața în sus dintre cele 32 din mîna spectatorului!

Acest truc remarcabil poate fi explicat, recurgînd la una dintre cele mai vechi enigme matematice. Închipuiți-vă că aveți în față două vase, unul cu un litru de apă, celălalt cu un litru de vin. Un centimetru cub de apă este trecut în vasul cu vin, iar vinul amestecat bine cu apa. Apoi un centimetru cub din amestec este trecut înapoi în vasul cu apă. Avem acum mai multă apă în vin decît vin în apă? Sau invers? (Nu ținem seama de faptul că, în practică, un amestec de apă cu alcool este cu ceva mai mic decît suma volumelor celor două lichide înainte de a fi fost amestecate.)

Răspunsul este că avem exact tot atîta vin în apă cît și apă în vin. Partea amuzantă a acestei probleme constă în cantitatea extraordinară de informație irelevantă pe care o conține. Nu avem nevoie să știm cît lichid este în fiecare vas, ce cantitate s-a trecut dintr-unul în celălalt, sau cîte transvazări s-au făcut. Nu contează dacă amestecul a fost bine egalizat sau nu. Nu este nici măcar esențial că la începutul experimentului cele două vase conțineau cantități de lichid egale! Singura condiție însemnată este că, la sfîrșit, fiecare vas trebuie să conțină tot atîta lichid ca la început. Acestea fiind cunoscute, devine evident, că o dată ce o cantitate x de vin lipsește din vasul cu vin, spațiul ocupat înainte de vin trebuie să fie umplut acum cu cantitatea x de apă.

Dacă cititorul este nedumerit din cauza acestui raționament, el și-l poate lămuri repede cu un pachet de cărți de joc. Așezați 26 de cărți de joc cu fața în jos pe masă, care să reprezinte vinul. Alături de ele, puneți 26 de cărți de joc cu fața în sus, care să reprezinte apa. Acum puteți muta cărți de joc într-o parte și cealaltă, în orice fel vreți, cu condiția ca să vă opriți cînd aveți exact cîte 26 de cărți în fiecare grupă. Veți constata atunci că numărul cărților de joc cu fața în jos din fiecare grupă este identic cu cel al cărților cu fața în sus din cealaltă grupă.

Încercați atunci experimentul similar, începînd cu 32 de cărți de joc cu fața în jos și 20 cu fața în sus. Faceți între ele oricîte mutări vreți, terminînd însă cu 20 de cărți în pachetul mai mic. Numărul de cărți cu fața în sus din pachetul mai mare va fi, în mod necesar, egal cu numărul de cărți cu fața în jos din pachetul mai mic (cel de 20). Acum răsturnați pachetul mai mic. Astfel, cărțile cu fața în jos sînt automat întoarse cu fața în sus, iar cele cu fața în sus vor ajunge cu fața în jos. De aceea, numărul de cărți cu fața în sus din ambele grupe va fi același.

Felul cum se efectuează trucul trebuie să fie acum limpede. La început, scamatorul întoarce cu fața în sus exact 20 de cărți de joc. Pe urmă, cînd preia pachetul de 20 cărți de joc de la spectator, acesta va conține un număr de cărți cu fața în jos egal cu numărul de cărți cu fața în sus rămase în pachet. El pretinde atunci că a mai întors cu fața în sus cîteva cărți, dar de fapt el întoarce dintr-o dată întreg pachetul cu cele 20 de cărți. Acesta va conține atunci același număr de cărți întoarse ca și în grupul de 32 din mîna spectatorului. Trucul îi pune în încurcătură îndeosebi pe matematicieni, care sînt capabili să se gîndească la tot soiul de explicații complicate.

Numeroase trucuri, cunoscute în limbajul scamatorilor americani sub denumirea de *spellers* (rostiri) se bazează pe principiile matematicii elementare. Iată unul dintre cele mai de efect. Vă întoarceți cu spatele la public și cereți cuiva să scoată dintr-un pachet 1—12 cărți și să le ascundă în buzunar, fără a vă spune cîte a luat. Îi spuneți apoi să se uite la cartea cu același număr din partea de sus a restului pachetului și să o țină minte.

Întoarceți-vă cu fața spre public și cereți să vi se dea numele unei persoane în viață sau decedate. De exemplu, cineva propune Marilyn Monroe (menționăm că numele trebuie să conțină mai mult de 12 litere). Luînd pachetul în mînă, îi spune celui care a ascuns cărțile în buzunar: „Vă rog să puneți cărțile pe masă una cîte una spunînd numele lui Marilyn Monroe literă cu literă, în felul următor". Pentru a arăta în ce fel să o facă, luți cărțile din partea de sus a pachetului și le puneți pe masă într-o coloană cu fața în jos, apoi luați cîte o carte pentru fiecare literă, pînă ce ați rostit numele întreg. Strîngeți aceste cărți și așezați-le deasupra pachetului.

Spuneți apoi în continuare: „Înainte de a face aceasta însă, vă rog să adăugați deasupra pachetului cărțile pe care le aveți în buzunar". Subliniați faptul, real de altfel, că nu aveți de unde să știți cîte cărți vor fi acestea. Totuși, deși se adaugă acest număr de cărți necunoscut, după ce spectatorul a terminat să rostească numele lui Marilyn Monroe, literă cu literă cartea de joc următoare (adică acea care este acum deasupra pachetului) va fi invariabil cea aleasă de el!

Modul cum operează trucul se pretează ușor la analiză. Fie x numărul de cărți din buzunarul spectatorului, precum și, totodată, poziția cărții pe care a ales-o din partea de sus a pachetului. Fie y numărul de litere ale numelui ales. Felul în care arătați cum tre-

buie rostit numele inversează automat ordinea a y cărți, aducînd cartea aleasă la o poziție de $y-x$ din partea de sus a pachetului. Adăugînd x cărți la pachet, avem $y-x+x$ cărți deasupra celei alese; x-ul dispare, lăsînd exact y cărți corespunzătoare rostirii numelui, înainte de a ajunge la cartea dorită.

Un principiu compensator mai subtil este cuprins în următorul truc. I se cere unui spectator să aleagă trei cărți și să le așeze cu fața în jos pe masă, astfel încît scamatorul să nu le vadă. Cărțile rămase se amestecă și i se înmînează scamatorului.

„Nu voi modifica poziția nici unei cărți, explică scamatorul. Tot ce voi face va fi să scot o carte care va fi exact la fel ca valoare și culoare cu cartea pe care o veți alege îndată". El scoate apoi o singură carte din pachet și o așază cu fața în jos pe masă.

Acum i se cere spectatorului să ia în mînă cărțile rămase și să întoarcă cu fața în sus cele trei cărți pe care le așezase înainte pe masă. Să presupunem că erau un nouar, o damă și un as. Scamatorul îi cere să așeze peste nouar alte cărți de joc, numărînd cu glas tare și începînd numărătoarea cu 10 și oprindu-se cînd ajunge la 15. Cu alte cuvinte, spectatorul pune peste nouar șase cărți de jos. Se procedează apoi la fel cu celelalte două cărți. Dama, a cărei valoare este 12 (valetul este 11 și regele 13), va avea nevoie de trei cărți pentru a duce numărătoarea de la 12 la 15. Asul (valoarea 1) va avea nevoie de 14 cărți.

Scamatorul are acum totalul valorilor pe care spectatorul le-a așezat cu fața în sus și-și memorează cartea care are această poziție, numărînd de la prima carte de sus a restului pachetului. În cazul nostru, totalul este 22 $(9+12+1)$, deci el se uită la cartea a 22-a. Scamatorul întoarce acum cu fața în sus „cartea prezicătoare". Cele două cărți concordă ca valoare și culoare!

Cum se realizează aceasta? Cînd scamatorul parcurge pachetul pentru a găsi o „carte prezicătoare", el își memorează cartea a patra de la baza pachetului și scoate apoi o altă carte, egală cu ea ca valoare și culoare. Restul trucului funcționează automat. (În rare ocazii, puteți găsi cartea prezicătoare printre cele trei de la partea de jos a pachetului. În acest caz, trebuie să țineți minte să-i spuneți spectatorului, mai tîrziu — atunci cînd el își face numărătoarea finală pînă la cartea aleasă — să-și termine numărătoarea și să se uite apoi la cartea *următoare*.) Las în seama cititorului sarcina ușoară de a obține o demonstrație algebrică a cauzei pentru care acest truc nu poate da greș.

Ușurința cu care cărțile de joc pot fi amestecate le face deosebit de convenabile pentru demonstrarea unui mare număr de teoreme ale probabilităților, dintre care multe sînt destul de uluitoare pentru a fi denumite trucuri. De exemplu, să ne închipuim că doi oameni au fiecare cîte un pachet amestecat de 52 de cărți de joc. Cineva numără cu glas tare de la 1 la 52: de fiecare dată, ambele persoane pun pe masă cîte o carte cu fața în sus. Care este probabilitatea că la un anumit moment al acestui proces, două cărți identice să fie puse pe masă simultan?

Mulți vor presupune că probabilitatea trebuie să fie mică, dar în realitate ea trece de 1/2! Probabilitatea de a *nu* avea coincidență este 1 împărțit la numărul *e*. (Aceasta nu este adevărat cu precizie, însă eroarea este mai mică de $1/10^{69}$.) Deoarece *e* este 2,718..., probabilitatea unei coincidențe este aproximativ 17/27, adică aproape 2/3. Dacă găsiți pe cineva care să parieze cu dv. la egalitate că nu va fi nici o coincidență, aveți o șansă mare de a cîștiga. Este interesant de menționat că avem aici un procedeu empiric, bazat pe probabilitate, pentru a obține o dezvoltare în fracție zecimală a lui *e* (comparabilă cu procedeul „acului lui Buffon" pentru numărul π). Cu cît folosim mai multe cărți de joc, cu atît probabilitatea necoincidenței este mai apropiată de $1/e$.

Capitolul 11 MEMORIZAREA NUMERELOR

Foarte multă lume folosește procedee mnemonice, adică metode de a memora unități de informație, prin asocierea lor cu lucruri de care își poate aduce mai ușor aminte. În Statele Unite, cel mai familiar din aceste procedee este, cu siguranță, poezioara care începe cu cuvintele: „*Thirty days hath September...*" (Septembrie are treizeci de zile...) O altă formulă mnemonică binecunoscută este: „*Every good boy does fine*" (orice băiat cuminte se poartă frumos) (pentru EGBDF liniile portativului).

Același principiu poate fi aplicat, în variante ingenioase, și pentru memorarea numerelor. Matematicienii inventează cu ușurință astfel de trucuri. În 1951, pe cînd se afla în vizită la New York, Bertrand Russell a spus unui reporter că îi este foarte ușor să-și reamintească numărul apartamentului său de la hotelul Waldorf-Astoria — 1414, deoarece 1,414 este rădăcina pătrată a lui 2. Matematicianul englez G.H.Hardy povestește că l-a vizitat pe prietenul său Srinivasa Ramanujan, genialul matematician indian, într-un taxi, care avea numărul 1729. Hardy a remarcat că este un număr neplăcut — „Nu", a răspuns imediat Ramanujan. „Este un număr foarte interesant. Este cel mai mic număr care poate fi exprimat în două feluri diferite, ca sumă a două cuburi" ($12^3 + 1^3$, sau $10^3 + 9^3$). Trebuie să admitem că, și printre matematicieni, o cunoaștere atît de intimă a numerelor este o raritate.

Cel mai obișnuit procedeu mnemonic pentru a ține minte un șir de cifre este o propoziție sau un vers, în care numărul de litere din fiecare cuvînt corespunde cu numărul în ordinea dorită. În diferite limbi, s-au elaborat multe „proptele ale memoriei" pentru a aminti cifrele numărului π, dincolo de primele patru zecimale. În engleză, ele se înșiruie, după lungime, de la anonima „*May I have a large container of coffee?*" (Pot avea o ceașcă de cafea mai mare?), prin fraza lui James Jeans „*How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics*"

(Cît de mult aș vrea să beau ceva, firește alcoolic, după grelele capitole de mecanică cuantică) pînă la următoarele versuri publicate de Adam C.Orr din Chicago în revista „The Literary Digest", 20 ianuarie, 1906, p.83:

„Now I — even I — would celebrate
In rhymes unapt the great
Immortal Syracusan rivaled nevermore,
Who in his wondrous lore
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate"[1].

Nu cunosc auxiliar asemănător în engleză pentru *e*, celălalt număr transcendent atît de mult folosit. Însă, dacă memorați primele cinci zecimale ale lui *e* (2,71828), le cunoașteți automat pe primele nouă, deoarece ultimele patru cifre au amabilitatea de a se repeta (2,718281828). În Franța *e* este memorat pînă la a 10-a zecimală prin formula mnemonică tradițională: *„Tu aideras à rappeler ta quantité à beaucoup de docteurs amis"* (Vei ajuta să-și amintească de cantitatea ta pe mulți prieteni savanți). Poate vreun cititor va reuși să construiască în engleză o frază amuzantă care să ducă pe *e* măcar pînă la primele cinci zecimale.

Există oare un sistem mnemonic care, o dată ce ni l-am însușit, ne va face capabili să memorăm repede orice șir de cifre? Există un astfel de sistem, și el a fost dezvoltat pînă la un grad înalt de „experții în memorie"[2] din zilele noastre. Sistemul poate servi nu numai pentru o demonstrație de memorie impresionantă în societate, ci el poate fi extrem de folositor în memorarea unor importante constante matematice și fizice, date cronologice, numere de case și de telefon, de licențe comerciale sau industriale, de carnete de asigurări sociale etc.

Deși arta mnemonicii provine din Grecia antică (termenul este derivat de la numele Mnemosina, zeița greacă a memoriei), abia în 1634, francezul Pierre Hérigone a publicat la Paris cartea sa *Cursus Mathematici*, care conținea un sistem ingenios pentru me-

[1] Acum eu — chiar și eu — aș celebra/în rime improprii pe marele/ Siracuzan nemuritor, niciodată întrecut/, care, în uimitoarea sa cunoaștere/ neîntrecută pînă acum/, le-a lăsat oamenilor îndrumări/ cum să măsoare cercurile.

[2] Autorul înțelege prin „experți în memorie", în primul rînd pe scamatorii care prezintă publicului trucuri de memorare a unor numere mari. — *N.T.*

morarea numerelor. Sistemul consta în a substitui consoane pentru cifre, adăugînd apoi vocale oriunde era necesar pentru ca să poată fi formate cuvinte. Cuvintele erau apoi ușor de ținut minte prin alte metode mnemonice.

Originalul alfabet numeric al lui Hérigone a fost repede adoptat de experții în memorie din mai multe țări. În Germania, marele Gottfried Wilhelm Leibniz a fost destul de interesat de această idee, pentru a o încorpora schemei sale de limbaj universal; Lewis Carroll a inventat ceva considerat de el drept o perfecționare a alfabetului numeric din *Memoria Technica* a lui Richard Grey, o carte de mnemonică populară în Anglia, publicată în 1730. (O reproducere a însemnărilor lui Carroll asupra alfabetului său numeric se poate găsi în articolul lui Warren Weaver *Lewis-Carroll ca matematician* din „Scientific American", aprilie, 1956.) În jurnalul său, Carroll relatează că și-a aplicat sistemul pentru a memora numărul π pînă la a 71-a zecimală și pentru a obține cuvinte-cheie la logaritmii tuturor numerelor prime mai mici de 100. Într-un timp, el a avut intenția să publice o cărțulie intitulată *Logarithms by Lightning: a Mathemantical Curiosity*.

Forma modernă a alfabetului numeric al lui Hérigone, așa cum este utilizat în mod curent de toți experții în memorie de limbă engleză, este redat în tabelul din fig.47.

Acesta trebuie bine fixat în memorie, înainte ca sistemul să poată fi folosit cu succes. În partea din dreapta a tabelului, figurează sugestii de natură să ajute la memorarea tabelului. Cititorul va observa că nu sînt întrebuințate decît consoane, iar acolo unde două sau mai multe consoane înlocuiesc aceeași cifră, ele au o pronunțare asemănătoare. Trei consoane, anume W, H și Y (cuvîntul „*why*", „dece"), nu apar în tabel.

Să presupunem că vrem să utilizăm sistemul pentru a ține minte că mercurul fierbe la 357°C. Primul pas constă în a găsi un cuvînt în care consoanele, luate în ordinea lor, se vor traduce prin 357. Un astfel de cuvînt ne vine repede în minte: *MILK* (lapte). Următorul pas constă în a asocia acest cuvînt, printr-o imagine mintală vie, cu cuvîntul „mercur". O cale constă în a ne gîndi la Mercur, mesagerul zeilor care își croiește drum printre nori cu un vas de lapte în mîini. Cu cît imaginea este mai lipsită de noimă, cu atît o ținem minte mai ușor. Dacă vrem să ne reamintim punctul de fierbere al mercurului, nu avem decît să urmăm lanțul de asociații de la element la zeul grec cu laptele și pînă la numărul 357. Ar putea face impresia că este o cale ocolită pentru a memoriza un

CIFRE	CONSOANE	AUXILIARI AI MEMORIEI	
1	T, D	T are o linie verticală	t
2	N	N are două linii verticale	n
3	M	M are trei linii verticale	m
4	R	R este a patra literă din „four" („patru")	FOUR
5	L	L este 50 în numerația romană	50
6	J, G moale, SH, CH	J arată ca 6 inversat	J 6
7	K, G dur, C dur	K poate fi tipărit ca doi de 7	K
8	F, V, PH	F minuscul are două bucle, ca și cifra 8	*f* 8
9	P, B	P arata ca un 9 inversat	P 9
0	Z, S, C moale	Z este inițiala lui „zero"	ZERO

Fig. 47 Un „alfabet numeric" în care consoanele țin loc de cifre.

număr, dar pînă în prezent nu au fost descoperite sisteme artificiale mai bune. Este uimitor cu cîtă tărie verigile lanțului rămîn fixate în memorie.

Să luăm și alte exemple. Numărul atomic al elementului indiu este 49. Ne putem reaminti ușor aceasta, legînd India de cuvîntul *RuPie*. Neptuniul are numărul atomic 93; ni-l închipuim pe Neptun pufăind dintr-o pipă cu *oPiuM*. Pentru tantal, elementul 73, ni-l putem reprezenta pe Tantal astupînd gaura din cupa sa cu un dop de *GuMă*. Alfabetul numeric este strict fonetic. Consoanele mute, cum sînt în engleză W,H și Y, sînt eliminate.

Tabelul din fig.48 arată un exemplu de felul cum putem memora primele trei zecimale din rădăcinile pătrate ale numerelor 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10. (Rădăcina pătrată a lui 8 este, natural, dublul rădăcinii pătrate a lui 2. Tot astfel, rădăcina pătrată a lui 12 se poate obține dublînd rădăcina pătrată a lui 3.) Nu se consideră decît primele trei consoane ale fiecărui cuvînt-cheie sau ale fie-

NUMĂRUL	RĂDĂCINA PĂTRATĂ	CHEIA MNEMONICĂ
2	1,414	RAT RACE[1]. Vă gîndiți la doi șobolani care se întrec în alergare
3	1,732	KIMONO Trei sugerează un triunghi. Gîndiți-vă la un kimonou pe care este imprimat un model din triunghiuri mici.
5	2,236	ENMESH[2]. Cinci sugerează un pentagon. Închipuiți-vă pentagonul încurcat iremediabil într-o panglică roșie.
6	2,449	RARE BEE[3]. Șase sugerează un hexagon. Gîndiți-vă la celulele hexagonale ale unui fagure. Pe deasupra celulelor umblă o albină cu două capete.
7	2,645	SHEER LINEN[4]. Șapte sugerează dansul celor șapte văluri
8	2,828	FUNNY FACE[5]. Opt, în engleză, sugerează imperfectul verbului „a mînca"[6]. Gîndiți-vă că ați luat ceva în gură și faceți o grimasă caraghioasă.
10	3,162	TOUCH NOSE[7]. Zece sugerează degetele. Închipuiți-vă că puneți toate cele zece degete pe nas.

Fig. 48 Cum se poate folosi alfabetul numeric pentru memorarea rădăcinilor pătrate.

cărei combinații de cuvinte. Ele sînt cele care figurează pentru zecimalele respectivei rădăcini pătrate. (Cifra din stînga virgulei nu trebuie luată în considerare, deoarece este evidentă.) Numeroase alte cuvinte pot, firește, să le înlocuiască pe cele alese aici. De obicei, cel mai bun lucru este să vă elaborați singuri cuvintele-cheie și asociațiile decît să le adoptați pe ale altcuiva; propriile dv. invenții vor fi mai aproape de experiența dv. și deci vă vor reveni mai ușor în minte.

Numerele mai mari pot fi memorate luînd cifrele în grupe de două sau de trei, găsind cîte un cuvînt potrivit pentru fiecare

[1] Întrecere între șobolani
[2] A prinde ca într-o plasă
[3] Albină neobișnuită
[4] Văl vertical
[5] Față caraghioasă
[6] *Eight* (opt) și *ate* (imperfectul de la a mînca) se pronunță aproape la fel.
[7] A pipăi nasul.

grupă și înlănțuind cuvintele astfel, încît să dea imagini mintale pregnante. Un număr de telefon, bunăoară, va fi fixat în memorie printr-un lanț de imagini care leagă persoana sau firma corespunzătoare cu cele două cuvinte care figurează pentru cifrele din numărul de telefon.

Cu ajutorul unor astfel de lanțuri de imagini mintale, artiștii care prezintă trucuri de memorie sînt capabili să repete liste lungi de cifre date la întîmplare, imediat după ce lista le-a fost citită cu glas tare. Acest tur de forță care pare de necrezut este pe măsura puterilor oricui își dă osteneala să consacre cîteva săptămîni unor exerciții zilnice pentru a-și însuși alfabetul numeric. Ca prim pas, încercați să memorați cele opt cifre din numărul de serie al unei bancnote. De exemplu, dacă numărul este 41-09-15-85, perechile pot fi traduse în cele patru cuvinte: *RÎD, ZeBra, TeLescop, FLoare*. Gîndiți-vă întîi la o *zebră* care rîde. Ea privește printr-un *telescop*. Acesta este îndreptat spre o *floare*.

Cînd vă alegeți cuvintele, substantivele care furnizează imagini vii, frapante, sînt, de obicei, preferabile, deși adjectivele pot fi adesea înlănțuite convenabil cu un nume. În numeroase cazuri, cuvintele care ne vin primele în gînd sînt de preferat, iar fiecare cuvînt trebuie legat de următorul prin imaginea cea mai ridicolă pe care v-o puteți închipui. Pe măsură ce veți exersa, cuvintele potrivite vă vor veni mai repede și veți fi curînd capabili să vă formați lanțul de imagini mintale cu destulă rapiditate pentru a ține pasul cu oricine vă pronunță încet cifrele.

Experții în memorare sînt capabili să construiască lanțuri de asociații mintale cu o viteză extraordinară, deoarece fiecare pereche de cifre le sugerează imediat un cuvînt plastic, pe care și-l extrag dintr-o listă memorată anterior. Astfel ei nu pierd timp ca să caute cuvinte adecvate. Unii operează cu liste memorate în prealabil, conținînd cuvinte pentru grupe de cîte trei cifre. Pentru a-i ajuta pe elevii săi de la școala de memorare din New York, Bruno Furst le punea la dispoziție un dicționar numeric tipărit, care conținea o selecție de cuvinte adecvate pentru fiecare număr de la 1 pînă la 1 000. Astfel de liste nu sînt însă necesare, dacă nu vreți să ajungeți un specialist în arta memorării. Puteți inventa oricînd cuvinte potrivite, pe măsură ce progresați, și dacă numerele vă sînt citite încet, veți constata că nu este de loc greu ca prin această metodă să memorați un șir de 50 de cifre date la întîmplare. Din

fericire, şirurile lungi de imagini mintale improvizate repede nu rămîn mult timp în memorie, şi deci dacă repetaţi turul de forţă după o zi sau două, nu veţi mai face confuzie între noile cuvinte-cheie şi cele dintr-o exhibiţie precedentă.

ADAOS

Dintre numeroasele răspunsuri la cererea mea de a se da o frază mnemonică pentru *e*, următoarele îmi par că merită în mod deosebit să fie menţionate:

„*To express* **e**, *remember to memorize a sentence to simplify this*" (pentru a exprima pe *e*, încearcă să memorezi o frază care simplifică aceasta). (John L.Greene, Beverly Hills, California),

„*To disrupt a playroom is commonly a practice of children*" (devastarea camerei de joacă este un obicei curent al copiilor). (Joseph J.Guiteras, Baldwinsville, New York),

„*By omnibus I traveled to Brooklyn*" (cu omnibusul am călătorit spre Brooklyn). (David Mage, New York, New York).

„*It enables a numskull to memorize a quantity of numerals*" (aceasta face capabil pe un prost să memoreze multe numere). (Gene Widhoff, Burbank, California).

În articolul *Mnemotecnia* din *Enciclopedia universal ilustrada*, găsim următoarea frază spaniolă pentru *e*: *Te ayudaré a recordar la cantidad a indoctos si reléesme bien* (spre a ajuta pe ignoranţi să memoreze cantitatea, dacă mă recitesc cu atenţie). În lucrarea lui Italo Ghersi, *Matematica Dilettevole e Curiosa*, la p. 755, găsim mai multe versuri italieneşti pentru *e*.

Capitolul 12

ALTE NOUĂ PROBLEME

1. ȚIGĂRILE TANGENTE

Patru mingi de golf pot fi astfel așezate, încît fiecare să fie tangentă la celelalte trei. Cinci monede de jumătate de dolar pot fi aranjate în așa fel, încît fiecare să le atingă pe celelalte patru (fig. 49).

Este oare posibil să așezăm șase țigări astfel încît fiecare să le atingă pe celelalte cinci? Țigările nu au voie să fie încovoiate sau frînte.

2. CELE DOUĂ PODURI PLUTITOARE

Două poduri plutitoare pornesc în același moment din ambele părți ale unui fluviu și străbat apa după un drum perpendicular pe maluri. Ele au viteză constantă, dar unul se deplasează mai rapid. Podurile se încrucișează în dreptul unui punct situat la 720 de iarzi, de malul cel mai apropiat. Ambele poduri rămîn la

Fig. 49

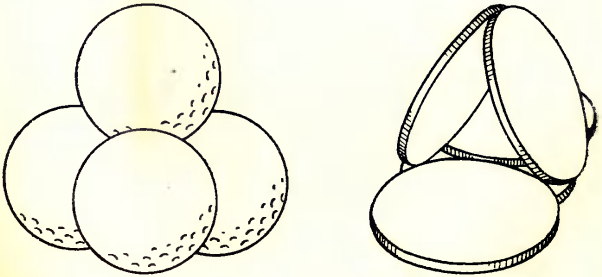
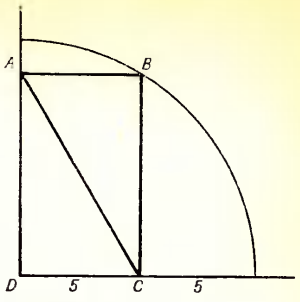


Fig. 50



chei 10 min, înainte de a face cursa de retur. La întoarcere, ele se întîlnesc la 400 de iarzi de celălalt mal.

Cît de lat este fluviul?

3. GHICIȚI DIAGONALA

Un dreptunghi este înscris într-un sfert de cerc, după cum se vede în fig. 50. Fiind date distanțele indicate, puteți oare determina precis lungimea diagonalei AC?

Timp de gîndire: un minut!

4. ELECTRICIANUL DESCURCĂREȚ

Un electrician se află în fața următoarei dileme supărătoare. În subsolul unei case cu trei etaje, el găsește capetele a 11 fire, toate la fel, înmănuncheate într-o gaură a zidului. Într-o altă gaură din zid, în pod, el găsește celelalte capete ale acelorași 11 fire, dar nu are nici o posibilitate să afle ce capăt de sus corespunde unui anumit capăt de jos. Cum să identifice capetele?

Pentru a-și îndeplini sarcina, el poate face două lucruri: (1) să scurtcircuiteze firele în ambele locuri, reunind capetele în orice fel vrea; (2) să caute un circuit închis printr-un „verificator de continuitate", constînd dintr-o baterie și o sonerie. Soneria funcțio-

nează cînd instrumentul este conectat la cele două capete ale unui circuit neîntrerupt.

Nevrînd să se epuizeze urcînd fără folos scările și fiind un pasionat al cercetărilor operaționale, electricianul s-a așezat în pod cu un creion și cu o hîrtie în mînă și a găsit curînd cea mai eficientă metodă posibilă pentru a identifica firele.

În ce constă metoda?

5. PARCURGEREA REȚELEI

Unul dintre cele mai vechi jocuri topologice, cunoscut multor elevi din clasele inferioare, constă în a trasa o linie continuă care să taie rețeaua închisă din fig. 51, astfel încît linia să intersecteze

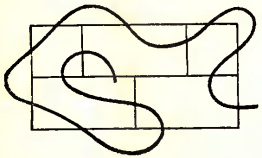


Fig. 51

numai cîte o singură dată fiecare din cele 16 segmente ale rețelei. Curba din figură nu rezolvă jocul, deoarece lasă un segment neintersectat. Nu se admit nici un fel de trucuri în soluții, cum ar fi trecerea curbei printr-un vîrf sau în lungul unui segment, îndoirea hîrtiei etc.

Nu este greu de demonstrat că problema nu poate fi rezolvată pe o suprafață plană. Două întrebări: Poate fi ea rezolvată pe suprafața unei sfere? Dar pe suprafața unui tor?

6. CELE DOUĂSPREZECE CHIBRITURI

Considerînd chibritul drept unitate de lungime, putem așeza 12 chibrituri în diverse feluri în plan, astfel încît să formeze poligoane cu aria întreagă. Figura 52 prezintă două poli-

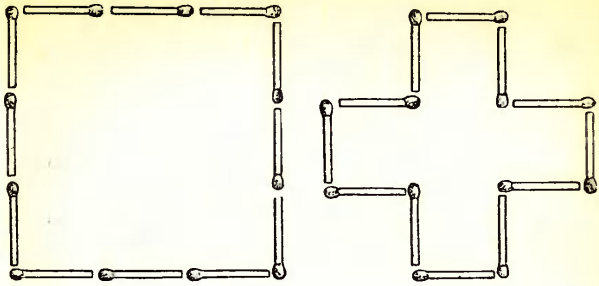


Fig. 52

goane din acestea: un pătrat cu aria de nouă unități și o cruce cu aria de cinci unități.

Iată problema: utilizați toate cele 12 chibrituri (fiecare chibrit cu întreaga lui lungime) pentru a forma în mod similar perimetrul unui poligon a cărui arie are exact patru unități.

7. GAURA ÎN SFERĂ

Această problemă de necrezut—pentru că pare să nu conțină date suficiente pentru a o soluționa — a apărut într-un număr recent din „The Graham Dial", o publicație a societății Graham Transmissions Inc. O gaură cilindrică având lungimea de 6 țoli a fost sfredelită prin centrul unei sfere solide. Care este volumul restului sferei?

8. CĂRĂBUȘII ÎNDRĂGOSTIȚI

Patru cărăbuși — A,B,C și D — ocupă vîrfurile unui pătrat cu latura de 10 țoli (fig.53). A și C sînt masculi, B și D sînt femele. Simultan, A pornește spre B, B spre C, C spre D și D spre A. Dacă toți patru cărăbușii merg cu aceeași viteză constantă, ei

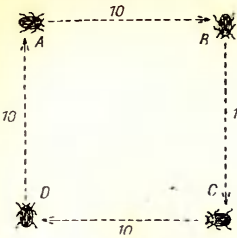


Fig. 53

vor descrie patru spirale logaritmice congruente, care se întîlnesc în centrul pătratului.

Ce distanță parcurge fiecare cărăbuș pînă în momentul întîlnirii? Problema poate fi rezolvată fără calcul.

9. CÎȚI COPII?

„Aud niște băieți care se joacă în curtea din spate", spune Jones, licențiat în matematică. „Sînt toți ai dv.?"

„Doamne, nu", exclamă prof. Smith, eminentul specialist în teoria numerelor. „Copiii mei se joacă cu prietenii lor, care fac parte din trei familii vecine, deși, din întîmplare, familia noastră este cea mai mare. Familia Brown are mai puțini copii. Green și mai puțini, iar Black are cel mai mic număr de copii".

„Cîți copii sînt în total?" întreabă Jones.

„Îți voi răspunde astfel", spune Smith.

„Sînt mai puțin de 18 copii, iar produsul dintre numărul copiilor celor patru familii coincide, din întîmplare, cu numărul casei mele, pe care l-ai văzut la venire".

Jones își scoate din buzunar carnetul de însemnări și creionul și începe să scrie. După un moment se uită la profesor și spune: „Am nevoie de o informație suplimentară: familia Black are mai mult de un copil"?

Imediat după ce Smith îi răspunde, Jones zîmbește și scrie corect numărul de copii din fiecare familie.

Cunoscînd numărul casei și aflînd dacă familia Black are mai mult de un copil, Jones a considerat problema banală. Este însă remarcabil faptul că numărul de copii din fiecare familie poate fi determinat chiar și numai pe baza informației de mai sus.

RĂSPUNSURI

1. Există mai multe moduri diferite de a așeza cele șase țigări. Figura 54 prezintă soluția tradițională, așa cum este dată în mai multe cărți de jocuri vechi.

Spre marea mea uimire, vreo 15 cititori au descoperit că *șapte* țigări pot fi și ele așezate în așa fel încît fiecare să le atingă pe celelalte. Firește, problema mai veche devine astfel perimată. Figura 55, pe care am primit-o de la George Rybicki și John Reynolds, licențiați în fizică ai Universității Harvard, arată cum se obține soluția. „Diagrama a fost desenată", scriu ei, „pentru cazul critic în care raportul dintre lungime și diametru este $\frac{7}{2}\sqrt{3}$. Aici punctele de contact cad exact la capetele țigărilor. Evident, soluția rămîne valabilă pentru orice raport lungime supra diametru, mai mare de $\frac{7}{2}\sqrt{3}$. Unele observații asupra dimensiunilor *reglementare* reale ale țigărilor dau un raport de aproximativ 8/1, care este efectiv mai mare decît $\frac{7}{2}\sqrt{3}$, deci soluția este acceptabilă". Observați că, dacă țigara centrală, îndreptată direct spre dv. în diagramă, este îndepărtată, cele șase țigări rămase dau o soluție simetrică, frumoasă a problemei inițiale.

Fig. 54

Fig. 55

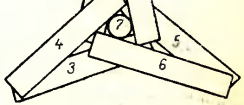
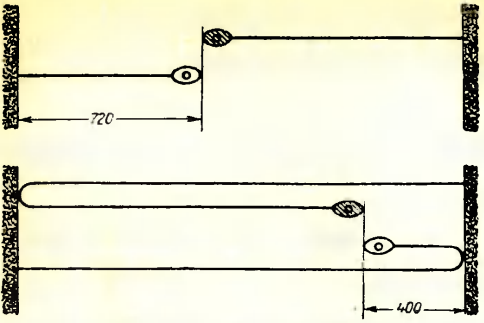


Fig. 56



2. Cînd podurile plutitoare se întîlnesc pentru prima dată (partea de sus a fig. 56), distanța totală parcursă de ele este egală cu lățimea rîului. Cînd ele ating fiecare malul opus, suma distanțelor străbătute este dublul lățimii; cînd se întîlnesc a doua oară, distanța totală este triplul lățimii fluviului. Dat fiind că podurile s-au mișcat cu o viteză constantă în cursul aceluiași interval de timp rezultă că fiecare pod a parcurs de trei ori mai mult decît atunci cînd s-au întîlnit pentru prima dată, adică lățimea totală a fluviului. Deoarece podul cel alb a făcut 720 iarzi pînă la prima întîlnire, distanța totală parcursă pînă la a treia întîlnire trebuie să fie 3 x 720, adică 2 160 iarzi. Desenul de jos arată limpede că aceasta este cu 400 iarzi mai mult decît lărgimea fluviului, deci scădem 400 din 2 160 și obținem 1 760 iarzi, adică o milă, pentru lățimea fluviului. Timpul cît podurile plutitoare au stat la chei nu intervine în problemă.

Problema poate fi abordată și altfel. Mulți cititori au rezolvat-o după cum urmează. Fie lățimea fluviului egală cu x. La primul drum, raportul dintre distanțele parcurse de cele două poduri plutitoare este $(x - 720) : 720$. A doua oară, el este $(2x - 400) : (x + 400)$. Rapoartele sînt egale, deci putem să-l găsim ușor pe x. (Problema a apărut în cartea lui Sam Loyd, *Cyclopedia of Puzzles*, 1914, p. 80.)

3. Segmentul AC este o diagonală a dreptunghiului (fig. 57). Cealaltă diagonală este, evident, raza cercului, egală cu 10 unități. Diagonalele fiind egale, AC are de asemenea 10 unități.

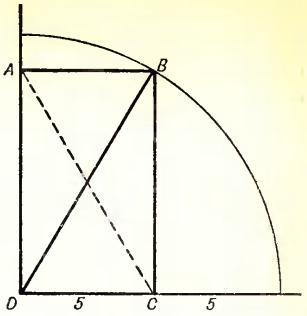


Fig. 57

4. În pod, electricianul a scurtcircuitat cinci perechi de fire (ele sînt legate prin linii punctate în fig. 58), lăsînd un fir liber. Apoi a coborît la subsol și a identificat capetele de jos ale perechilor scurtcircuitate, cu ajutorul „verificatorului de continuitate". A notat capetele cum se vede în figură, apoi le-a scurtcircuitat așa cum arată liniile punctate.

Urcînd din nou în pod, a înlăturat toate scurtcircuitele, dar a lăsat firele împreună pe porțiuni insulare, astfel încît perechile să

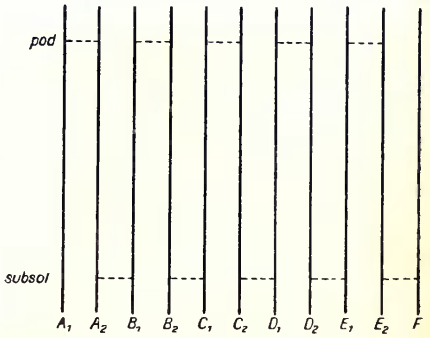


Fig. 58

fie acum identificabile. A verificat apoi continuitatea dintre firul liber (despre care știa că este capătul de sus al lui F) și un alt fir. După ce a găsit celălalt fir, el a putut imediat să-l noteze cu E_2 și să-i identifice perechea E_1. Apoi a verificat continuitatea dintre E_1 și un alt capăt, care, o dată găsit, putea fi notat cu D_2 iar perechea lui cu D_1. Continuînd în același fel, capetele rămase au fost ușor identificate. Procedeul este, evident, valabil pentru orice număr impar de fire.

J.G. Fletcher, Princeton, New Jersey, a fost primul de la care mi-a parvenit o metodă de aplicare a procedeului de mai sus, întrucîtva modificat, la orice număr par de fire, cu excepția lui 2. Să admitem un al 12-lea fir, în extrema dreaptă a fig. 58. Aceleași cinci perechi sînt scurtcircuitate în pod, și rămîn două fire libere. La subsol, firele sînt scurtcircuitate ca și înainte, iar al 12-lea fir este notat cu G. Revenit în pod, electricianul identifică ușor pe G, ca fiind singurul dintre cele două fire libere la care nu găsește continuitate. Restul de 11 fire se notează așa cum s-a explicat mai sus.

Procedee oarecum mai eficace, care țin seama de toate cazurile, cu excepția celui a două fire (două fire nu au soluție), mi-au fost trimise de: D.N. Buell, Detroit; R. Elsdon-Dew, Durban, Africa de Sud; Louis Katz și Fremond Reizman, studenți la Facultatea de fizică a Universității din Wisconsin; Danforth K. Gannett, Denville, New Jersey. D.K. Gannett a explicat clar procedeul cu diagrama pentru 15 sîrme, redată în fig. 59. Metoda de etichetare este următoarea:

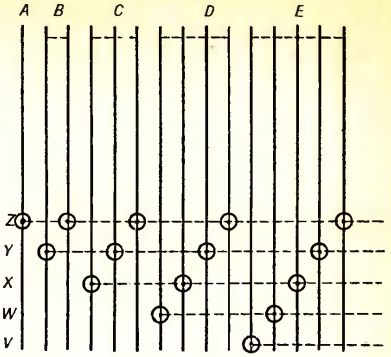
1) La pod: firele se scurtcircuitează în grupe de cîte 1, 2, 3, 4 și 5 notate respectiv cu A, B, C, D, E. Ultima grupă nu este nevoie să fie completă.

2) La subsol: se identifică grupele prin verificări de continuitate. Se numerotează firele și se scurtcircuitează în grupele Z, Y, X, W, V.

3) La pod: se înlătură scurtcircuitările. Verificările de continuitate vor identifica acum firele fără echivoc. Firul 1 este, firește, A. Firul 3 este singurul din grupa B care prezintă continuitatea cu 1. Perechea lui va fi 2. În grupa C, numai firul 6 se conectează cu 1. Numai 5 este în conexiune cu 2. Firul rămas în C va fi 4, și așa mai departe la celelalte grupe.

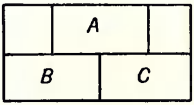
Schema poate fi extinsă spre dreapta oricît de mult vrem. Pentru a determina procedeul în cazul a n fire, trebuie numai să fie completată schema pînă la al n-lea fir.

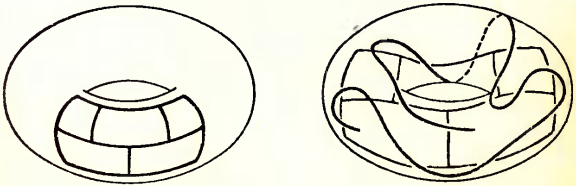
Fig. 59



5. O linie continuă care intră într-o secțiune dreptunghiulară și iese din ea trebuie neapărat să taie două segmente. Deoarece spațiile A, B și C din fig. 60 sînt înconjurate fiecare de un număr impar de segmente, rezultă că un capăt al curbei trebuie să se afle în interior dacă toate segmentele rețelei sînt intersectate. Dar o

Fig. 60

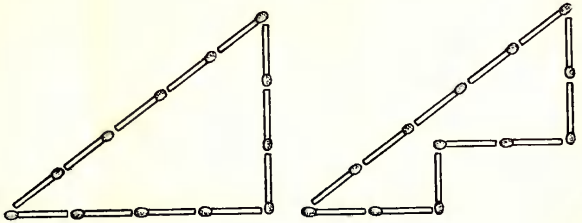




linie continuă are numai două extremități, și deci problema este nerezolvabilă pe o suprafață plană. Același raționament se aplică unei rețele pe o sferă sau pe un tor (desenul din stînga jos). Dar rețeaua poate fi desenată pe tor (ca în dreapta jos), astfel încît gaura torului să fie în *interiorul* unuia dintre cele trei spații *A*, *B*, *C*. În acest caz, problema se rezolvă ușor.

6. Douăsprezece chibrituri pot fi utilizate pentru a forma un triunghi dreptunghic cu laturile de 3, 4 și 5 unități, cum se arată în fig. 61, stînga. Acest triunghi va avea aria de 6 unități. Modifi-

Fig. 61



cînd poziția a trei chibrituri, așa cum se arată în dreapta figurii, eliminăm două unități, lăsînd un poligon cu aria de 4 unități.

Această soluție poate fi găsită în multe cărți de enigme matematice. Există și sute de alte soluții. Elton M. Palmer, Oakmont, Pennsylvania, a făcut o legătură între această problemă și poliominourile din capitolul următor, arătînd că fiecare dintre cele cinci tetrominouri (figuri formate cu patru pătrate) poate furniza baza pentru un mare număr de soluții. Nu avem decît să adăugăm și să scădem aceeași cantitate de arii triunghiulare pentru a putea utiliza toate cele 12 chibrituri. Figura 62 dă cîteva exemple reprezentative, fiecare linie fiind bazată pe un tetromino diferit.

Eugene J. Putzer, colaborator științific principal la General Dynamics Corporation; Charles Shapiro, Oswego, New York; Hugh J. Metz, Oak Ridge, Tennessee, au sugerat soluția în stea din fig. 63. Potrivind lățimea razelor stelei, puteți obține orice arie cu-

prinsă între 0 și 11,196, aria unui dodecagon regulat, cea mai mare arie posibilă cu cele 12 chibrituri.

7. Fără a recurge la calcul, problema poate fi rezolvată astfel: fie R raza sferei. După cum se vede în fig. 64, raza găurii cilindrice va fi atunci rădăcina pătrată din R^2-9, iar înălțimea calotelor sferice de la fiecare capăt al cilindrului va fi $R-3$. Pentru a determina ce rămîne după îndepărtarea cilindrului și a calotelor, adunăm volumul cilindrului, $6\pi(R^2-9)$, cu volumul celor două calote sferice de la capetele cilindrului și scădem totalul din volumul sferei, $4\pi R^3/3$. Volumul calotei se obține prin următoarea formulă, unde A reprezintă înălțimea, iar r raza: $\pi A(3r^2+A^2)/6$.

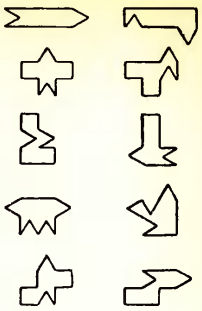


Fig. 62

Efectuînd acest calcul, toți termenii dispar neapărat, cu excepția lui 36π, care este tocmai volumul a ceea ce rămîne din sferă, exprimat în toli cubi. Cu alte cuvinte, restul este constant indiferent de diametrul găurii sau de mărimea sferei!

Cea mai veche referire pe care am găsit-o la această frumoasă problemă se află la p. 86 a cărții lui Samuel I. Jones, *Mathematical Nuts*, 1932. Un analog bidimensional al problemei apare în același volum, la p. 93. Fiind dat cel mai lung segment de dreaptă care

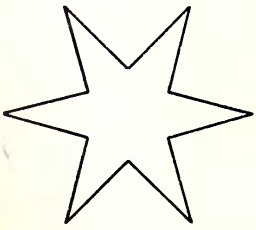


Fig. 63

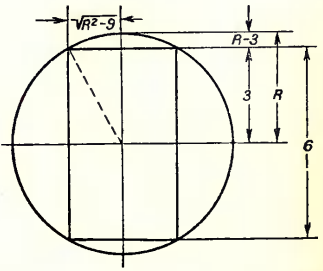


Fig. 64

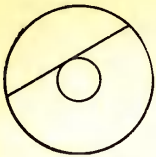


Fig. 65

poate fi trasat pe un drum circular de indiferent ce dimensiune (fig. 65), aria drumului va fi egală cu aria unui cerc avînd ca diametru acest segment.

John W. Campbell Jr., editorul lui *Astounding Science Fiction*, a fost unul dintre cei cîțiva cititori care au rezolvat repede problema sferei, prin următorul raționament abil: problema nu ar fi fost dată, dacă nu avea o soluție unică. Dacă are soluție unică, volumul trebuie să fie o constantă, valabilă și în cazul în care gaura se reduce la raza zero. De aceea, restul trebuie să fie egal cu volumul unei sfere avînd diametrul de 6 țoli, adică 36 π.

8. În fiecare moment dat, cei patru cărăbuși formează vîrfurile unui pătrat care se micșorează și se rotește, pe măsură ce cărăbușii se apropie tot mai mult unul de altul. De aceea, drumul fiecărui urmăritor va fi, în fiecare moment, perpendicular pe drumul urmăritului. Aceasta înseamnă că, de exemplu, pe cînd A se apropie de B, nu există componentă în mișcarea lui B care să-l apropie sau să-l îndepărteze pe B de A. Prin urmare, A îl va prinde pe B în același timp în care l-ar fi prins dacă B ar fi rămas pe loc. Lungimea fiecărui drum spiral va fi aceeași ca și latura pătratului: 10 țoli.

Dacă trei cărăbuși pornesc din vîrfurile unui triunghi echilateral, mișcarea fiecărui cărăbuș va avea o componentă egală cu 1/2 (cosinusul unui unghi de 60° este de 1/2) din viteza care îl duce spre urmăritorul său. Doi cărăbuși vor avea deci o viteză relativă de apropiere egală cu 3/2 din viteza cu care se mișcă. Cărăbușii se întîlnesc în centrul triunghiului, după un interval de timp egal cu dublul laturii triunghiului, împărțită prin triplul vitezei, fiecare cărăbuș descriind un drum care este egal cu 2/3 din lungimea laturii triunghiului.

9. Cînd Jones a început să lucreze la problema profesorului, el știa că fiecare dintre cele patru familii are un număr diferit de copii și că totalul era mai mic de 18. El mai știa că produsul celor patru numere este egal cu numărul casei în care locuiește profesorul. De aceea, primul său pas evident a constat în a descompune numărul casei în patru factori diferiți, a căror sumă să fie mai mică de 18. Dacă ar fi existat numai o singură cale pentru a obține descompunerea, soluția problemei ar fi fost imediată. Deoarece el n-a putut-o

rezolva fără informație suplimentară, tragem concluzia că trebuie să fi existat mai mult decît o descompunere a numărului casei.

Pasul următor constă în a scrie toate combinațiile posibile de patru numere diferite al căror total este mai mic decît 18 și de a obține produsul fiecărei grupări. Constatăm că există mai multe cazuri unde mai mult decît o singură combinație dă același produs. Cum stabilim care produs este numărul casei?

Cheia stă în faptul că Jones a întrebat dacă familia cea mai mică are mai mult de un singur copil. Întrebarea are înțeles numai dacă numărul casei este 120, care se poate descompune astfel: 1 x 3 x 5 x 8, 1 x 4 x 5 x 6, sau 2 x 3 x 4 x 5. Dacă Smith ar fi răspuns „nu", problema ar fi rămas nerezolvată. Dat fiind că Jones a rezolvat-o știm că răspunsul a fost „da". Familiile aveau, așadar, 2, 3, 4 și 5 copii.

Problema a fost pusă pentru prima dată de Lester R. Ford și publicată în „American Mathematical Monthly", martie, 1948 (problema E/776).

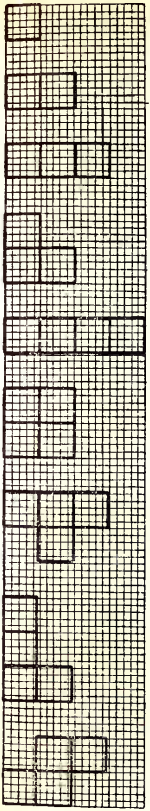
Capitolul 13 POLIOMINOURI

Termenul „poliomino" a fost introdus de Solomon W. Golomb, matematician principal la Laboratorul de propulsie prin reacție de la Institutul tehnologic din California. În articolul său *Table de șah și poliominouri* (publicat în „American Mathematical Monthly" în 1954, cînd Golomb avea 22 de ani și era absolvent al Universității Harvard), el a definit poliominoul ca pe o mulțime de pătrate „simplu conexă". El înțelegea prin aceasta o mulțime de pătrate reunite în lungul laturilor. Golomb adaugă că un jucător de șah ar putea spune că ele sînt „legate prin mutarea turei", deoarece tura s-ar putea mișca dintr-un pătrat în altul printr-un număr finit de mutări. Fig. 66 reprezintă un monomino și toate variantele de poliominouri cu două, trei și patru pătrate legate între ele.

Există numai un singur tip de domino, două trominouri și cinci tetrominouri. Dacă trecem la pentominouri (cinci pătrate), numărul de tipuri sare la 12. Ele sînt redate în fig. 67. Figurile asimetrice, care au o formă diferită cînd sînt „inversate", se consideră ca fiind unul și același tip. În toate amuzamentele cu poliominouri care vor fi tratate în acest capitol, figurile asimetrice pot fi așezate în oricare dintre cele două imagini în oglindă ale lor.

Numărul de poliominouri distincte, de un ordin dat, este, evident, în funcție de numărul de pătrate din fiecare, dar pînă acum nimeni nu a izbutit să găsească o formulă care să pună în legătură numărul de *n*-ominouri cu *n*. Pentru a calcula numărul poliominourilor de ordin superior, trebuie să ne întoarcem la procedee greoaie, care consumă mult timp. Există 35 de variante distincte de hexominouri și 108 variante de heptominouri. Această din urmă cifră conține heptominoul discutabil din fig. 68. În cele mai multe jocuri de poliominouri, este recomandabil să eliminăm formele lde acest tip (există 6 de acest fel printre octominouri), care au „goluri" interioare.

Fig. 66



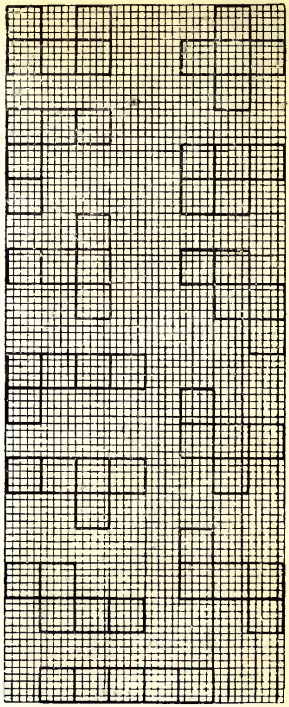


Fig. 67 Cele douăsprezece pentominouri

Fig. 68

În cap. 3 (problema 3), am avut de-a face cu o problemă de poliomino, care consta în a aşeza piese de domino pe o tablă de şah mutilată. Articolul lui Golomb discută o varietate de probleme interesante similare, în care este vorba despre poliominouri de ordin mai înalt. Este, evident, imposibil să acoperim o tablă de şah de 8×8 cu trominouri (deoarece 64 de pătrate nu se împart exact la 3), dar poate ea fi acoperită cu 21 trominouri liniare şi cu un monomino? Printr-un sistem ingenios de colorare a pătratelor cu trei culori, Golomb demonstrează că aceasta este posibil, numai dacă monominoul este aşezat într-unul din cele patru pătrăţele haşurate în fig. 69. Pe de altă parte, o ingenioasă argumentare inductivă demonstrează că 21 de trominouri drepte şi un monomino vor acoperi tabla de 8 x 8, indiferent de locul unde aşezăm monominoul. De asemenea, este posibil să acoperim tabla cu 16 tetrominouri, cu condiţia ca toate să fie de aceeaşi specie, cu excepţia tetrominoului pieziş, care nu va acoperi nici o latură a tablei de şah. O colorare în benzi a tablei ne ajută să demonstrăm că ea nu poate fi acoperită cu 15 tetrominouri în L şi de un tetromino pătrat; o colorare în formă de dinţi de ferăstrău dovedeşte că ea nu poate fi acoperită de un tetromino pătrat împreună cu indiferent ce combinaţie de tetrominouri liniare şi piezişe.

Trecînd la pentominourile din fig. 67, se pune imediat de la sine următoarea întrebare: vor putea oare aceste 12 forme, împreună cu un tetromino pătrat, să acopere o tablă de şah de 8 x 8? Prima soluţie publicată a problemei a apărut în cartea lui Henry Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, 1907. În soluţia lui Dudeney, pătratul ocupă o poziţie laterală. În urmă cu vreo 20 de ani, cititorii unei mărunte publicaţii britanice, intitulată „The Fairy Chess Review" („fairy chess" este un fel de şah, jucat cu reguli, tablă şi piese diferite de cele obişnuite), au început să facă experimente cu problema lui Dudeney, precum şi cu alte

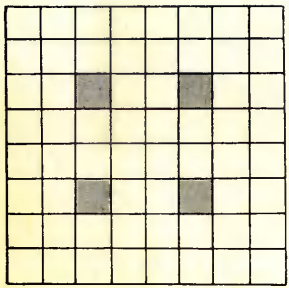


Fig. 69

scheme de pentomino și hexomino. Cele mai interesante rezultate au fost sintetizate în numărul din decembrie 1954 al acestei reviste. Multe din cele ce urmează sînt extrase de acolo, precum și dintr-un articol nepublicat al lui Golomb, în care acesta se ocupa de teoreme paralele, dar pe care le-a descoperit independent.

T.R. Dawson, fondatorul revistei „The Fairy Chess Review", a născocit cel dintîi o cale fermecător de simplă pentru a demonstra că problema lui Dudeney poate fi rezolvată, așezînd pătratul oriunde pe tabla de șah. Soluția sa în trei părți este redată în fig. 70. Tetrominoul pătrat este combinat cu pentominoul în L pentru a forma un pătrat de 3 x 3. Rotind pătratul mare, tetrominoul pătrat poate fi adus în patru poziții diferite, în fiecare dintre cele trei configurații. Dat fiind că tabla de șah în întregul ei poate fi atît rotită cît și reflectată, se vede ușor că tetrominoul pătrat poate fi situat în orice loc de pe tablă.

Nimeni nu știe cîte soluții diferite ale acestei probleme există în total, însă după o evaluare neexagerată se spune că sînt mai mult de 10 000. În 1958, Dana S. Scott (pe atunci doctorant în matematică la Universitatea Princeton), care, pe baza unui contract, lucra cu Departamentul pentru sisteme de informație al Oficiului de cercetări navale, instruia calculatorul numeric MANIAC, pentru a găsi toate soluțiile posibile avînd bucata pătrată exact în centru. După un timp de funcționare de aproximativ trei ore și jumătate, mașina a dat o listă exhaustivă de 65 de soluții distincte, fără a socoti soluțiile suplimentare, care se pot obține prin rotații și oglindiri.

În cadrul programării calculatorului, a fost convenabil ca soluțiile să fie clasificate în trei categorii, definite fiecare de poziția crucii față de pătratul central. O soluție din fiecare categorie este

Fig. 70 Soluția lui T.R. Dawson.

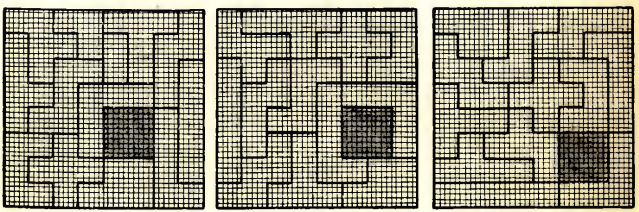


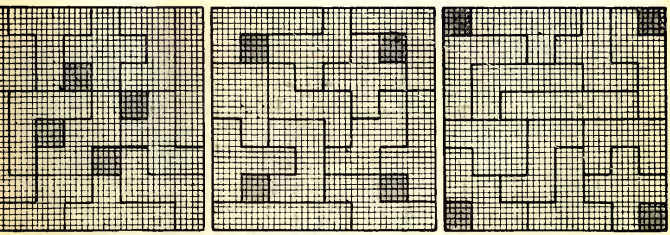
Fig. 71

redată în fig. 71. Maşina a găsit 20 de soluţii din primul tip, 19 din al doilea şi 26 din al treilea.

O examinare a celor 65 de soluţii dezvăluie o cantitate de fapte interesante. Nu este posibilă o soluţie în care pentominoul liniar să nu aibă o latură lungă suprapusă peste o margine a tablei. (Aceasta nu este valabil pentru soluţii în care pătratul are alte poziţii decît centrul.) Şapte soluţii (toate din categoriile 1 şi 3) nu au „răscruci", adică puncte în care se întîlnesc vîrfurile a patru figuri. Prima soluţie din fig. 71 aparţine acestui tip. Din punct de vedere artistic unii experţi în poliominouri au considerat răscrucile ca fiind defecte ale desenului. Soluţia a treia din fig. 71 ilustrează o altă trăsătură interesantă: o linie dreaptă în lungul căreia modelul poate fi îndoit. Există 12 scheme de acest tip, toate în categoria a treia şi nici una fără răscruci.

Dacă tetrominoul pătrat este descompus şi lăsăm libere patru pătrate de o unitate, tabla de 8 x 8 poate fi acoperită artistic, în

Fig. 72



foarte multe feluri. Trei modele din acestea sînt arătate în fig. 72. Tot astfel, este posibil să reunim cele 12 pentominouri în dreptunghiuri de 6 x 10, 5 x 12, 4 x 15 și 3 x 20 (vezi fig. 73). Dreptunghiul de 3 x 20, cel mai greu de construit, este lăsat pe seama cititorilor curioși. El are numai două soluții distincte, dacă nu ținem seama de rotații și reflexii.

Remarcați că dreptunghiul de 5 x 12 din fig. 73 este prezentat într-o soluție care conține un dreptunghi de 5 x 7 și unul de 5 x 5.

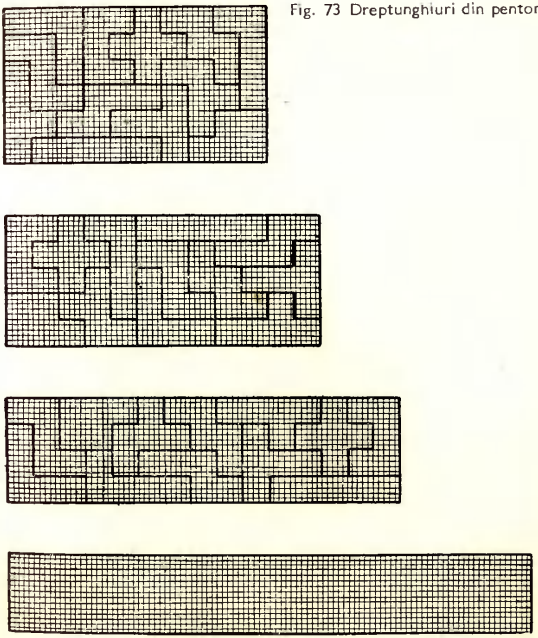


Fig. 73 Dreptunghiuri din pentominouri.

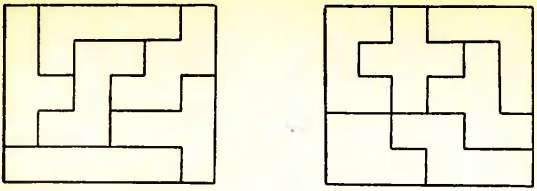
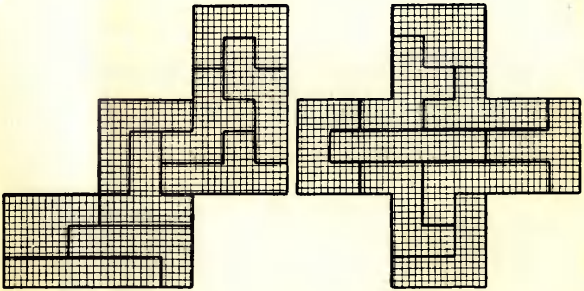


Fig. 74

Mai mulți cititori au descoperit dreptunghiurile de 5 x 6 din fig. 74, care pot fi împreunate, astfel încît să dea un dreptunghi de 5 x 12 sau unul de 6 x 10.

Raphael M. Robinson, profesor de matematică la Universitatea din California, a propus recent problema pe care a denumit-o „de triplare". Alegeți un pentomino, apoi utilizați nouă din cele rămase pentru a construi modelul la scară mare al figurii pe care ați ales-o. Modelul va fi de trei ori mai înalt și mai lat decît figura mică. Joseph B. Tucker, parohul bisericii episcopale a Trinității din Clarksville, Tennessee, a ajuns independent la problema triplării, după ce a citit discuția despre pentominouri din această rubrică. El mi-a trimis multe soluții excelente, printre care și cele reproduse în fig. 75. Problema triplării poate fi soluționată pentru fiecare dintre cele 12 figuri.

Fig. 75 Scheme de triplare.



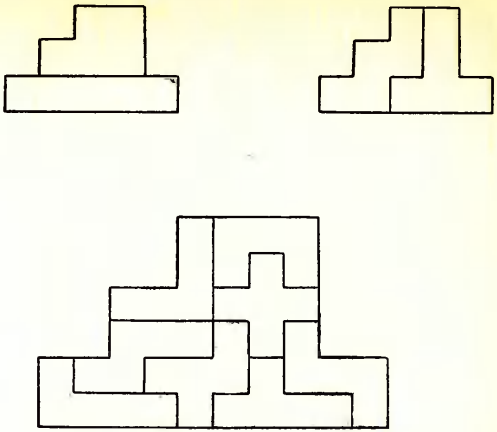


Fig. 76 Schemă de „dublură dublată".

Probleme întrucîtva asemănătoare au fost propuse de alți cititori. Harry Brueggemann din San Marino, California, a sugerat ceea ce a numit „problema dublurii dublate". Formați întîi orice figură vreți cu două pentominouri. Construiți o dublură a ei cu alte două figuri. La sfîrșit, cele opt figuri rămase sînt folosite pentru a construi aceeași figură, însă de două ori mai mare. Figura 76 prezintă o soluție tipică. Paul J. Slate din West Orange, New Jersey, a propus să utilizăm toate cele 12 figuri pentru a forma un dreptunghi de 5×13, avînd un gol de forma uneia dintre figuri. Problema poate fi rezolvată dînd golului forma fiecăruia dintre pentominouri. O astfel de soluție este ilustrată în fig. 77.

O altă problemă interesantă cu pentominouri, propusă de H.D. Benjamin în „The Fairy Chess Review", este dată în fig. 78. Cele 12 pentominouri vor acoperi exact un cub avînd muchia egală cu rădăcina pătrată din 10 unități. Cubul se obține îndoind modelul în lungul liniilor punctate.

Care este numărul minim de pentominouri care pot fi așezate pe o tablă de șah, astfel încît să fie imposibil să mai așezăm pe tablă

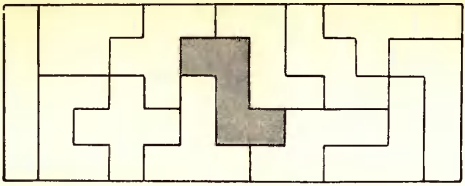


Fig. 77

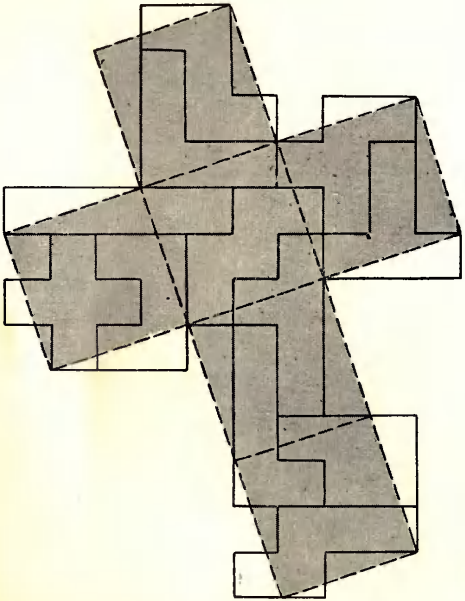
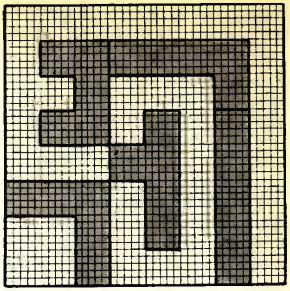


Fig. 78 Un cub din pentominouri.

Fig. 79 Joc cu pentominouri.



vreunul dintre pentominourile rămase? Această întrebare captivantă este pusă de Golomb, şi tot el răspunde că numărul lor este cinci. Figura 79 reprezintă o astfel de configuraţie. Această problemă i-a sugerat lui Golomb un fascinant joc competitiv, care se poate juca pe o tablă de şah cu pentominouri mari din carton, tăiate astfel, încît să se suprapună exact peste pătrăţelele tablei. (Îl îndemnăm pe cititor să-şi confecţioneze aceste figuri, nu numai pentru plăcerea jocului, ci şi pentru a rezolva probleme cu pentominouri şi pentru a crea probleme noi.)

Doi sau mai mulţi jucători aleg pe rînd cîte un singur pentomino şi-l aşază unde vor pe tabla de şah. Cartoanele nu au nici „faţă", nici „spate". Ca în toate problemele din acest capitol, figurile asimetrice pot fi folosite oricum. Primul jucător care nu mai are cum să-şi aşeze cartonul, pierde.

Golomb scrie: „Jocul durează cel puţin cinci şi cel mult 12 mutări; el nu se poate termina nedecis: are mai multe deschideri posibile decît şahul şi-i va pasiona pe jucătorii de toate vîrstele. Este greu să recomandăm strategia care trebuie urmată, dar există două principii valabile:

1. Încercaţi să faceţi mutarea în aşa fel încît să fie loc pentru un număr par de cartoane. (Aceasta presupune numai doi jucători.)

2. Dacă nu puteţi analiza situaţia, faceţi ceva ca să complicaţi poziţia, încît jucătorul următor să aibă dificultăţi de analiză mai mari decît dv.".

Deoarece cele 35 de hexominouri au o arie totală de 210 pătrate, ne vine imediat în minte să le aranjăm astfel încît să formeze un

dreptunghi de 3 x 70, 5 x 42, 6 x 35, 7 x 30, 10 x 21 sau 14 x 15. M-am gîndit în mod serios să ofer un premiu de 1 000 de dolari primului cititor care va reuși să construiască unul dintre aceste șase dreptunghiuri, dar gîndul la orele care s-ar putea pierde astfel m-a îngrozit și m-a făcut să renunț. Toate aceste eforturi sînt sortite eșecului. Demonstrația dată de Golomb acestei teze este un exemplu pregnant de utilizare a două instrumente puternice ale geometriei combinatorii. Este un capitol puțin cunoscut al matematicii, deși are numeroase aplicații practice în problemele de proiectare inginerești care cuprind componentele standardizate ce urmează a fi potrivite între ele în modul cel mai eficace. Instrumentele sînt: (1) folosirea unor culori contrastante pentru a veni în ajutorul intuiției matematice și (2) principiul „verificării parității", bazat pe proprietățile combinatorii ale numerelor pare și impare.

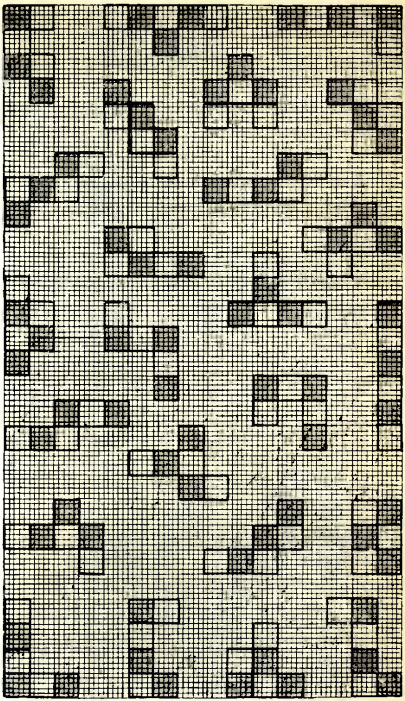
Începem demonstrația, colorînd dreptunghiurile dorite, alternativ cu pătrățele albe și negre, asemenea unei table de șah. În fiecare caz, este clar că dreptunghiul trebuie să conțină 105 pătrate negre și 105 albe, cîte un număr impar pentru fiecare.

Îndreptîndu-ne atenția asupra celor 35 de hexominouri, constatăm că 24 dintre ele vor acoperi totdeauna trei pătrate negre și trei albe, cîte un număr impar din fiecare. Există un număr par din aceste „hexominouri impare", și deoarece par înmulțit cu impar dă par, știm că toate cele 24 vor acoperi cîte un număr par de pătrate din fiecare culoare.

Cele 11 hexominouri rămase au o astfel de formă, încît fiecare trebuie să acopere patru pătrate de o culoare și două de cealaltă, cîte un număr par din fiecare. Avem un număr impar din aceste „hexominouri pare", însă iarăși, deoarece par înmulțit cu impar dă par, știm că aceste 11 figuri vor acoperi cîte un număr par de pătrate din fiecare culoare. (Fig. 80 și 81 împart cele 35 de hexominouri în grupa pară și în cea impară.) În sfîrșit, deoarece par plus par dă par, conchidem că cele 35 de hexominouri vor acoperi împreună un număr par de pătrate negre și unul par de pătrate albe. Din nefericire, fiecare dreptunghi conține cîte 105 pătrate din fiecare culoare, un număr impar. De aceea, nici un dreptunghi nu poate fi acoperit de cele 35 de hexominouri.

„În domeniul raționamentului plauzibil, există unele lucruri din care putem trage anumite învățăminte, încheie Golomb. Ni se

Fig. 80 Cele 24 de hexominouri „impare".



pun la dispoziție anumite date de bază și trebuie să muncim mult și din greu pentru a le face să se încadreze într-o schemă. Dacă reușim, ne închipuim că această schemă ar fi singura care «satisface faptele»; în realitate, datele sînt simple manifestări ale întregului plin de armonie și de interes. Astfel de raționamente au fost folosite

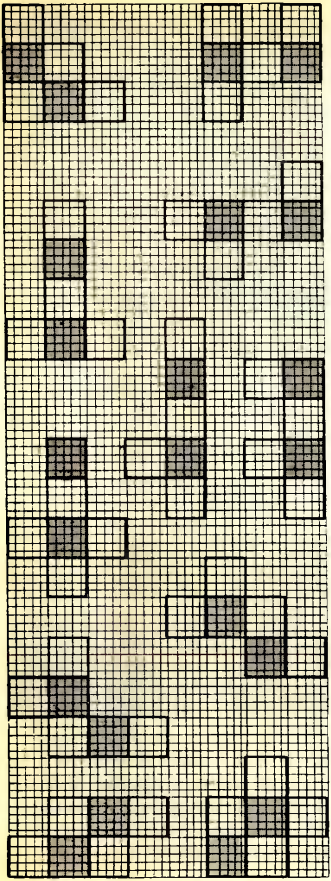


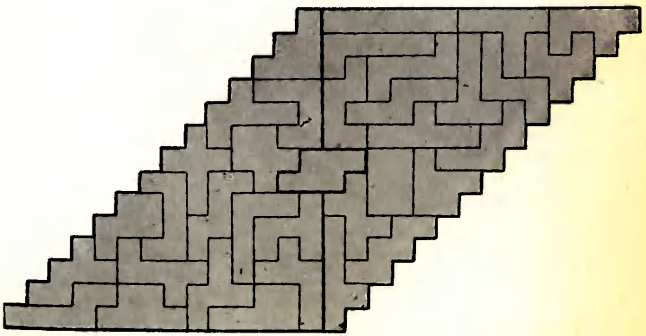
Fig. 81 Cele 11 hexominouri „pare".

în repetate rînduri în religie, în politică, ba chiar și în știință. Pentominourile ilustrează faptul că pot fi posibile mai multe scheme diferite pentru obținerea acelorași «date», toate schemele fiind la fel de viabile, iar cea cu care încheiem este determinată mai curînd de forma pe care o căutăm decît de datele pe care le avem la îndemînă. Este, de asemenea, posibil ca, pentru anumite date (ca în problema hexominourilor de mai sus), să nu existe nici o schemă de tipul pe care ni se cere să-l căutăm".

ADAOS

Pentru cititorii care ar dori să lucreze cu modele de hexominouri, adaug aici (fig. 82 și 83) două desene sugestive, reproduse din „The Fairy Chess Review". Fiecare model este format cu ajutorul mulțimii celor 35 de hexominouri. Modelele care utilizează întreaga mulțime pot fi realizate numai în cazul cînd colorarea în tabla de șah prezintă un exces de pătrate de o culoare egal cu 2, 6, 10, 14, 18 sau 22.

Fig.82 Un model de hexomino.



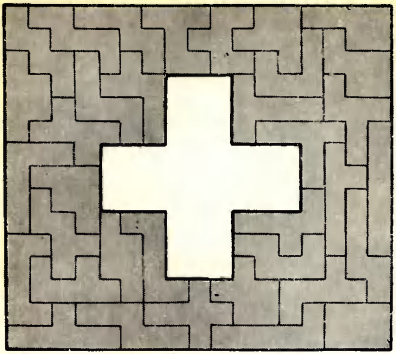


Fig. 83 Un alt model din hexominouri.

O cutie cu pentominouri de masă plastică în diverse culori a fost pusă în vînzare în 1957 de către firma Tryne Products, Inc., 233 Broadway, New York, sub numele comercial Hexed.

Paradoxul matematic poate fi definit ca un adevăr matematic atît de uluitor, încît este greu să-i dăm crezare, chiar după ce am verificat fiecare etapă din demonstrația lui. Sofismele matematice sînt, și ele, aserțiuni uluitoare, dar, spre deosebire de paradoxurile matematice, demonstrațiile lor conțin anumite erori greu de sesizat. Fiecare ramură a matematicii, de la aritmetica elementară și pînă la teoria topologică modernă a mulțimilor, își are patrimoniul de argumentări contrafăcute de acest fel. Firește, cele mai bune dintre ele sînt acelea care dau concluzia cea mai incredibilă și conțin erorile cele mai subtil camuflate. Euclid a consacrat o carte întreagă sofismelor geometrice, dar manuscrisul nu s-a păstrat, așa încît putem face doar ipoteze asupra conținutului acestei lucrări clasice de matematică recreativă, care s-a pierdut.

Am ales următoarele șapte sofisme, pentru varietatea și interesul pe care-l prezintă. Ele nu vor fi explicate, dar poate că cititorul va considera că este amuzant și distractiv să găsească erorile lor.

Primul nostru sofism este cît se poate de elementar. Îl vom prezenta în genul unui paradox amuzant, folosit de marele matematician german David Hilbert pentru a ilustra una dintre proprietățile specifice ale lui $\aleph_0$, cel mai mic dintre numerele transfinite. Se povestește că directorul unui hotel cu o infinitate de camere, toate ocupate, vrea să facă loc unui nou oaspete. El procedează astfel: mută pe fiecare ocupant în camera cu numărul imediat următor, eliberînd astfel camera nr. 1. Ce poate să facă însă în cazul în care îi vin o infinitate de oaspeți noi? Imperturbabilul director mută, pur și simplu, pe fiecare ocupant într-o cameră al cărei număr este de două ori mai mare decît numărul celei pe care o deține acum; oaspetele din camera 1 trece în camera 2, cel din 2 în 4, din 3 în 6, din 4 în 8 etc. Astfel devin libere toate camerele cu număr impar și se face loc pentru toată lumea.

Dar este oare realmente necesar ca numărul de camere ocupate să fie infinit, înainte de a se putea face loc unor noi musafiri? Următoarea poezie, publicată de o revistă engleză spre sfîrșitul secolului al XIX-lea, ne povestește în ce fel a reușit un hangiu deștept, care avea nouă camere goale, să asigure, cu ușurință, găzduire în camere separate pentru 10 călători.

Într-o noapte, pe furtună*
La un han, nerăbdători,
Au cerut, în cor, să doarmă
Zece vajnici călători.

Nouă camere cu pat am,
Hangiul le-a zis greoi,
Opt din voi vor dormi singuri
Și-ntr-un pat vor dormi doi.

Auzind aceste vorbe
Oaspeții s-au înfuriat.
Fiindcă fiecare-n parte
Voia singur într-un pat.

Scărpinîndu-se în creștet
Agerul stăpîn de han
Le-a cerut un bob zăbavă
Și-a grăit plin de elan:

Cum vreți voi, așa voi face,
Oricît va fi de bizar.
În odaia A să intre
Primii doi inși, temporar.

* Ten weary, footsore travelers, /All in a woeful plight, /Sought shelter at a wayside inn./ One dark and stormy night.// „Nine rooms, no more," the landlord said,/ „Have I to offer you./ To each of eight a single bed,/ But the ninth must serve for two.// A din arose. The troubled host/ Could only scratch his head./ For of those tired men no two./ Would occupy one bed.// The puzzled host was soon at ease — /He was a clever man — /And so to please his guests devised./ This most ingenious plan.// In room marked A two men were placed,/ The third was lodged in B,/ The fourth to C was then assigned,/ The fifth retired to D.// In E the sixth he tucked away,/ In F the seventh man,/ The eight and ninth in G and H,/ And then to A he ran,// Wherein the host, as I have said, / Had laid two travelers by; / Then taking one — the tenth and last — / He lodged him safe in I. // Nine single rooms — a room for each — /Were made to serve for ten;/And this it is that puzzles me./ And many wiser men.

În odaia B primește
Pat pe-o noapte insul 3,
Iar în C și D să intre
4 și cu 5, că-s grei.

E,F,G, au paturi bune
Pentru 6,7,8.
Iar în H va fi culcușul
Lui nea 9, că-i mai copt.

Zece-i unul din cei doi
Care-au stat pînă aci
În odaia A. Să-l scoatem
Și să-i dăm odaia I.

Iată cum hangiul nostru
Spre uimirea tuturor
A cazat în nouă paturi
Zece vajnici călători.

Un sofism ceva mai complicat este următoarea demonstrație algebrică, potrivit căreia un număr a este egal cu un număr mai mic b:

$$a = b + c$$

Înmulțim ambii membri cu $a - b$ și obținem

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$

Trecem ac în stînga:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

Scoatem în factor

$$a(a-b-c) = b(a - b - c)$$

Împărțim ambii membri prin $a - b - c$ și avem

$$a = b.$$

Operațiile cu numărul imaginar i (rădăcina pătrată din -1) comportă numeroase capcane, după cum atestă următoarea demonstrație uluitoare:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1} \times \sqrt{1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1},$$

$$1 = -1.$$

În geometria plană, cele mai multe sofisme sînt legate de un desen greșit construit. Să luăm, de exemplu, demonstrația stupefiantă care arată că partea din față a unui poligon decupat dintr-o foaie de hîrtie are altă arie decît spatele. Demonstrația a fost inventată de L. Vosburgh Lyons, un neuropsihiatru din New York, pentru a utiliza un principiu curios, descoperit de Paul Curry, tot din New York.

Începeți prin a desena pe o foaie de hîrtie cu pătrățele triunghiul cu aria 60 din fig. 84. Decupați în lungul liniilor, pentru a obține șase fragmente, apoi colorați partea din spate a fiecărui fragment. Dacă toate cele șase fragmente sînt întoarse cu fața în jos, ca să obținem un triunghi colorat ca cel din partea de mijloc a ilustrației, vom constata că triunghiul prezintă un gol cu aria de două unități pătrate. Cu alte cuvinte, aria lui s-a micșorat la 58 de unități. Dacă întoarcem trei fragmente astfel încît partea lor albă să apară la vedere, lăsînd trei fragmente colorate, putem forma figura din partea de jos a ilustrației. Aceasta are aria de 59 de unități. Este ceva care nu merge aici, dar ce anume?

Teoria probabilităților abundă în raționamente plauzibile, dar curioase. Să presupunem că tocmai ați întîlnit pe prietenul dv. Jones și aveți fiecare cîte o cravată pe care soția v-a făcut-o cadou. Începeți o discuție pentru a vedea care a primit cravata cea mai scumpă. Pînă la urmă, cădeți de acord cu Jones să tranșați chestiunea, vizitînd magazinul unde au fost cumpărate cele două cravate și controlîndu-le prețul. Cîștigătorul (adică acela a cărui cravată este mai scumpă) trebuie să-i dea cravata sa celuilalt, drept consolare.

Iată cum raționați: „Șansele ca să cîștig sau să pierd disputa sînt egale. Dacă cîștig, voi fi mai sărac cu valoarea cravatei pe care o port. Dacă însă pierd, sînt sigur că voi cîștiga o cravată mai scumpă. De aceea, controversa este limpede în avantajul meu".

Firește, Jones poate raționa exact la fel. Cum poate un pariu să fie favorabil ambelor părți?

Unul dintre cele mai surprinzătoare paradoxuri ale topologiei constă în faptul că un tor (o suprafață în formă de covrig) poate fi întors pe dos, trecîndu-l printr-o gaură laterală, întinzînd suprafața fără a o rupe. Dar nu despre aceasta este vorba. După ce s-a publicat acest paradox în numărul din ianuarie 1950 al lui „Scien-

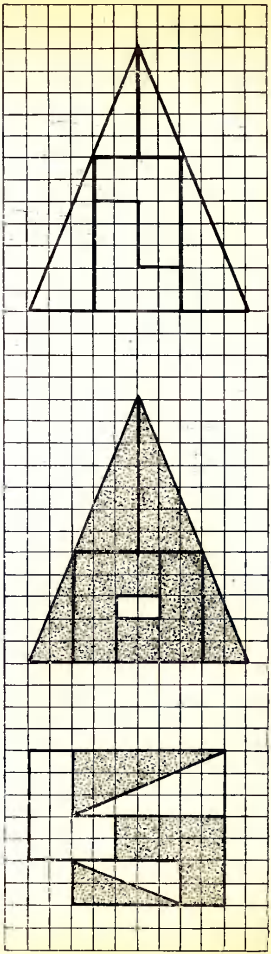


Fig. 84 Triunghiul lui Curry.

tific American", un inginer din New Jersey a trimis revistei un tub pe care-l întorsese pe dos. Dacă așa ceva se poate face, atunci pare să rezulte de aici un fapt și mai remarcabil.

Pe fața exterioară a unui tor desenați un inel, de exemplu în dreapta (fig. 85 sus). Pe partea interioară a aceluiași tor, desenați un al doilea inel. Evident, aceste două curbe închise sînt înlănțuite. Trecem acum torul prin gaură. După cum arată ilustrația de jos, aceasta face ca primul inel să ajungă în interior, iar al doilea în exterior. Inelele nu mai sînt înlănțuite! Aceasta contrazice evident o lege fundamentală a topologiei, care afirmă că două curbe înlănțuite nu pot fi separate fără a rupe o curbă și a o trece pe cealaltă prin ruptură.

Ultimul nostru sofism, din teoria elementară a numerelor, se ocupă de numere „interesante", respectiv „neinteresante". Firește un număr poate fi interesant într-o mulțime de moduri. Numărul 30 era interesant pentru George Moore, cînd a scris faimosul lui omagiu pentru „femeia de 30 de ani", vîrsta la care considera că o femeie măritată este mai ispititoare ca oricînd. Pentru un specialist în teoria numerelor este mai probabil că 30 va fi pasionant pentru că este cel mai mare întreg avînd proprietatea că toți întregii mai mici cu care nu are divizor comun sînt numere prime. Numărul 15 873 este fascinant, deoarece, dacă îl înmulțiți cu indiferent ce cifră iar apoi cu 7, rezultatul va consta în întregime din repetări ale cifrei alese. Numărul 142 857 este chiar mai pasionant. Înmulțiți-l cu orice cifră de la unu la șase și veți obține aceleași șase cifre în aceeași ordine ciclică.

Se pune întrebarea: există oare numere neinteresante? Putem demonstra că nu, prin următoarele etape simple. Dacă există numere neinteresante, putem împărți toate numerele în două mulțimi: cele interesante și cele neinteresante. În mulțimea numerelor neinteresante există un singur număr care este cel mai mic. Deoarece el este cel mai mic număr neinteresant, el devine, *ipso facto*, un număr interesant. De aceea, trebuie să-l scoatem din mulțimea neinteresantă și să-l transferăm în cealaltă. Acum însă, vom avea un alt număr neinteresant, care este cel mai mic. Repetînd procedeul, toate numerele neinteresante vor deveni interesante.

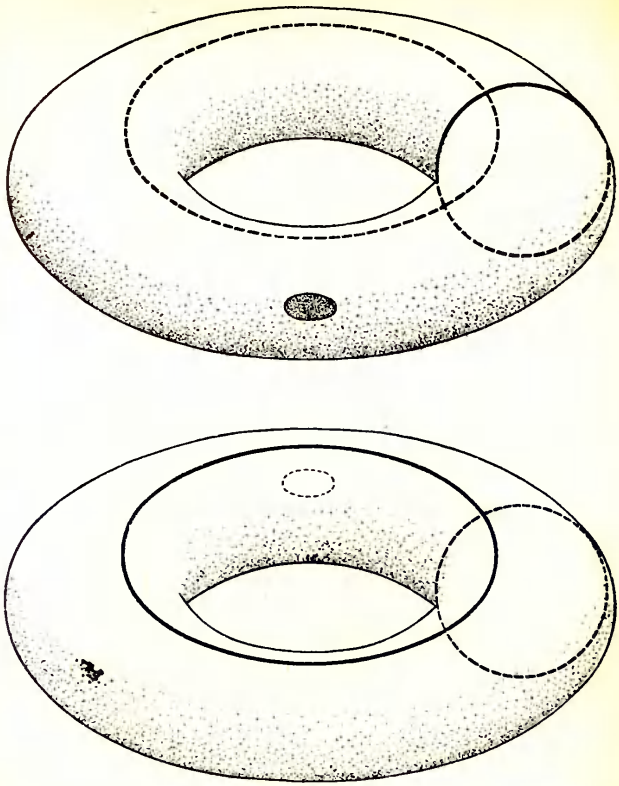


Fig. 85 Două inele înlănțuite vor apărea neînlănțuite, cînd torul este întors pe dos, trecîndu-l printr-o gaură laterală.

Doi cititori au avut amabilitatea să-mi trimită cîte un al nouălea catren pentru poezia cu călătorii obosiți, sosiți pe jos la han. (Menționăm că poezia a apărut în revista „Current Literature", vol. 2, aprilie, 1889, p. 349. Nu se dă numele autorului, dar se indică drept sursă publicația „Pittsburgh Bulletin", fără dată. Paradoxul este mult mai vechi decît poezia; ar fi totuși interesant de știut cine i-a dat această formă poetică.) Ralph W. Allen din Los Angeles scrie:

În noaptea-aceea zarva m-asurzise
Clientul 10 urla ca apucat.
„Clientul 2, nu eu, el zise,
Primi odaia I! Pe mine m-a uitat!"*

John F. Mooney, de la Ebasco International Corporation, New York, a exprimat sofismul astfel:

Hangiul ne-a mințit, fiind lipsit de scrupul.
Naivi și proști găsește numai rare ori.
A pus în A doi inși, dar numărase unul,
Și nu numai o dată, ba chiar de două ori**.

Sofismul care a intrigat cel mai mult pe cititori a fost cel cu torul. Este adevărat că torul poate fi întors pe dos, dar astfel se schimbă, așa-numita „fire" a torului. Rezultatul este că cele două inele își schimbă locurile și rămîn înlănțuite. Mai mulți cititori au făcut modele excelente, desprinzînd partea de sus a unui ciorap și cosînd extremitățile pentru a confecționa torul. Inelele au fost făcute din ață de două culori contrastante, cusute de fața exterioară și de cea interioară a torului. Un astfel de tor se întoarce ușor pe dos printr-o gaură făcută în material, arătînd exact și foarte eficace ceea ce se întîmplă cu inelele.

Pentru o explicație amănunțită a paradoxului cu triunghiul și a unei mulțimi de alte paradoxuri înrudite, trimitem pe cititori la cele două capitole spre „Dispariții geometrice" din cartea mea

---

* I had not heard the din that night/As number ten raised hue and cry /'Twas number two — not number ten — /That bedded down in room marked I.

** If we reflect on what he's done,/ We'll see we're not insane./Two men in A, he's counted one,/ Not oncem but once again.

Mathematics, Magic and Mystery, editată de Dover. Paradoxul cu cravatele este analizat complet în cartea lui Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations*, editată tot de Dover.

„Demonstrația" de la sfîrșit, în legătură cu faptul că nu există numere neinteresante, a primit ca răspuns următoarea telegramă de la Dave Engle, de la Colegiul din Puget Sound, Tacoma, Washington:

ÎN IANUARIE SCIENTIFIC AMERICAN SUGEREAZĂ CĂ PUȚIN ÎNAINTE DE INFINITATE ÎNCETAȚI SĂ TĂIAȚI ȘI SĂ ELIMINAȚI NUMERELE PLICTICOASE. PĂSTRAȚI MĂCAR UNUL DE DRAGUL INTERESULUI!

Unul dintre cele mai vechi şi cele mai captivante jocuri matematice de două persoane este cunoscut astăzi sub numele de Nim. Probabil de origine chineză, este jucat cîteodată de copii cu bucăţele de hîrtie, iar de adulţi cu monede. În varianta cea mai răspîndită a jocului, se aşază 12 monede în trei linii orizontale, aşa cum se arată în fig. 86.

Regulile sînt simple. Jucătorii iau pe rînd una sau mai multe monede, cu condiţia ca toate să fie din aceeaşi linie orizontală. Cel care ia ultima monedă cîştigă. Se poate juca şi invers: cine ia ultima monedă pierde. Un bun jucător descoperă curînd, în ambele variante, că poate oricînd să cîştige, dacă una dintre mutările sale lasă două linii cu mai mult de o monedă într-una din ele şi cu acelaşi număr în ambele linii; sau dacă mutarea lasă o monedă într-o

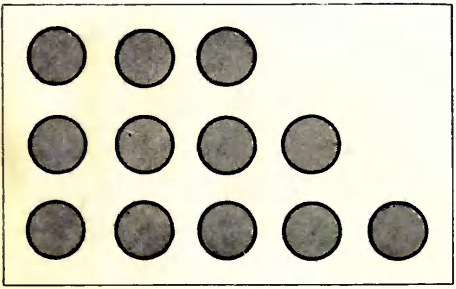


Fig. 86 Douăsprezece monede aşezate pentru un nim de „3, 4, 5".

linie, două în a doua și trei în a treia. Primul jucător are un cîștig sigur, dacă scoate două monede din linia de sus în mutarea întîi, după care joacă „rațional".

Analiza nu conține nimic uimitor, însă în pragul secolului nostru s-a făcut o descoperire uluitoare în legătură cu jocul. S-a constatat că el poate fi generalizat la orice număr de linii, cu orice număr de monede în fiecare, și că o strategie absurd de simplă, care utilizează numere binare, dă oricui posibilitatea de a realiza un joc perfect. Prima analiză și demonstrație completă a fost publicată în 1901 de Charles Leonard Bouton, conferențiar de matematică la Universitatea Harvard. Tot Bouton i-a dat jocului numele de *nim*, probabil inspirat de vechiul verb englez care înseamnă a lua sau a fura.

În terminologia lui Bouton, fiecare combinație de monede în jocul generalizat este „protejată" sau „neprotejată". Dacă poziția pe care o lasă un jucător, după ce și-a făcut mutarea, garantează cîștigul acestui jucător, poziția se numește protejată. În cazul contrar, este neprotejată. Astfel, în jocul de „3, 4, 5", descris, primul jucător generează o poziție protejată, luînd două monede din linia de sus. Orice poziție neprotejată poate fi transformată în una protejată printr-o mutare adecvată. Orice poziție protejată devine neprotejată prin *indiferent ce* mutare. De aceea, pentru a juca rațional, fiecare jucător trebuie să-și facă mutările în așa fel, încît orice poziție neprotejată pe care a preluat-o să fie transformată în una protejată.

Pentru a determina dacă o poziție este sau nu protejată, numerele din fiecare linie se scriu în notație binară. Dacă, adunînd fiecare coloană, obținem zero sau un număr par, poziția este protejată. Dacă nu, este neprotejată.

Nu există nimic misterios în notația binară. Ea nu este decît un mod de a scrie numerele ca sume ale puterilor lui doi. Tabelul din fig. 87 prezintă echivalenții binari ai numerelor de la 1 la 20. Observați că fiecare coloană, dacă le luați de la dreapta la stînga, are în partea de sus o putere succesivă mai mare a lui doi. Astfel, numărul binar 10101 ne spune să adunăm 16 cu 4 și cu 1, ceea ce ne dă 21 ca echivalent în sistemul zecimal bazat pe puterile lui zece. Pentru a aplica analiza binară la poziția de nim care începe

	16	8	4	2	1
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0

Fig. 87 Tabel de numere binare pentru nim.

cu 3,4,5, începem prin a scrie liniile în notație binară, astfel:

	4	2	1
3		1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
Total	2	1	2

Coloana din mijloc dă ca sumă 1, un număr impar, deci această combinație este neprotejată. De acea, primul jucător o poate transforma într-una protejată. După cum am explicat, el realizează aceasta, scoțînd două monede din linia de sus. Aceasta schimbă numărul binar de sus în 1, eliminînd astfel numărul impar din totalul coloanei. Încercînd alte mutări de deschidere, cititorul va descoperi că aceasta este singura care asigură poziția.

O cale ușoară de analiză a oricărei poziții, cu condiția ca nici o linie să nu conțină mai mult decît 31 monede, constă în a folosi degetele de la mîna stîngă drept calculator binar. Să admitem că jocul începe cu patru linii de 7, 13, 24 și 30 de monede. Sînteți primul jucător. Cum este poziția: protejată sau neprotejată? Desfaceți degetele mîinii stîngi, cu palma spre dv. Degetul mare înregistrează unitățile din coloana 16; arătătorul pe cele din coloana 8; mijlociul, pe cele din coloana 4; inelarul pe cele din coloana 2; degetul mic corespunde coloanei 1. Pentru a reprezenta numărul 7 în acest calculator, îndoiți întîi degetul care reprezintă cea mai mare putere a lui 2, mai mică decît 7. Este 4, deci îndoiți degetul mijlociu. Continuați să adunați puterile lui 2, mergînd spre dreapta,

pînă cînd totalul atinge 7. Aceasta se obține, natural, îndoind degetul mijlociu, inelarul și degetul mic. Celelalte trei numere — 13, 24 și 30 — se reprezintă în calculator exact în același fel, numai că orice deget îndoit care intervine în reprezentarea unui număr este acum desfăcut, în loc să fie îndoit.

Indiferent de numărul de linii ale jocului, dacă terminați procedeul cu toate degetele desfăcute, poziția este protejată. Aceasta înseamnă că mutarea dv. o va transforma cu certitudine într-o poziție neprotejată și că este sigur că pierdeți jocul, dacă adversarul cunoaște nimul tot atît de bine ca dv. În acest exemplu, însă, terminați calculul cu primele două degete îndoite, ceea ce înseamnă că poziția este neprotejată și că puteți cîștiga printr-o mutare corespunzătoare. Dat fiind că numărul de combinații neprotejate este mult mai mare decît al celor protejate, hazardul favorizează în mare măsură pe primul jucător, dacă poziția inițială este dată la întîmplare.

Acum, cînd știți că 7, 13, 24, 30 este o poziție neprotejată, cum găsiți o mutare care să o transforme într-una protejată? Este greu de calculat cu ajutorul degetelor, deci este mai bine să scrieți după cum urmează cele patru numere binare:

	16	8	4	2	1
7			1	1	1
13		1	1	0	1
24	1	1	0	0	0
30	1	1	1	1	0
Total	2	3	3	2	2

Notați coloana cea mai apropiată de marginea din stînga care dă ca sumă un număr impar. Orice linie care prezintă o unitate în această coloană poate fi modificată, astfel încît poziția să devină protejată. Să presupunem că vreți să scoateți o monedă sau mai multe din linia a doua. Puneți zero în locul primei unități, apoi ajustați cifrele rămase în dreapta, așa încît nici o coloană să nu mai aibă suma impară. Singura cale de a obține aceasta constă în a schimba al doilea număr binar în cifra 1. Cu alte cuvinte scoateți din linia a doua toate monedele, cu excepția uneia singure. Celelalte două mutări cîștigătoare constau în a lua patru monede din linia a treia sau 12 din ultima linie.

Este folositor să țineți minte că puteți cîștiga totdeauna, dacă lăsați două linii cu un număr egal de monede. Din acel moment,

nu aveți decît să faceți fiecare mutare în așa fel, încît liniile să rămînă egale. Această regulă, ca și analiza binară de mai sus, se aplică jocului normal, în care cîștigă cel care ia ultima monedă. Din fericire, nu este nevoie decît de o modificare banală, pentru a adapta această strategie la jocul inversat. Atunci cînd jocul invers ajunge (și trebuie să ajungă) la un punct în care numai o singură linie are mai mult de o monedă, trebuie să luați fie toate monedele fie să lăsați una singură în această linie, astfel încît să rămînă un număr impar de linii cu cîte o monedă. Astfel, dacă poziția este 1,1,1,3, le luați pe toate din ultima linie. Dacă poziția este 1, 1, 1, 1, 8, luați 7 din ultima linie. Modificarea strategiei intervine numai la mutarea finală, cînd este ușor să vă dați seama cum puteți cîștiga.

Deoarece calculatoarele numerice funcționează pe baza sistemului binar, nu este greu să programăm un astfel de calculator, încît să joace nim perfect, sau să construim o mașină specială pentru acest scop. Edward U. Condon, fostul director al Biroului național de standardizare, în prezent șeful catedrei de fizică a Universității Washington din St. Louis, a fost unul dintre inventatorii primei mașini de acest fel. Brevetată în 1940 sub numele de „Nimatron", mașina a fost construită de Westinghouse Electric Corporation și prezentată în pavilionul acestei societăți, la Expoziția mondială de la New York. Mașina a făcut 100 000 de jocuri, din care a cîștigat 90 000. Cele mai multe înfrîngeri au fost determinate de personalul de deservire, pentru a dovedi unor vizitatori sceptici că mașina poate fi învinsă.

În 1941, Raymond M. Redheffer, actualmente conferențiar de matematică la Universitatea din California (Los Angeles), a proiectat o mașină de nim, considerabil perfecționată. Mașina lui Redheffer are aceeași capacitate ca a lui Condon (patru linii cu cel mult șapte monede în fiecare), dar în timp ce Nimatronul cîntărea o tonă și necesita relee costisitoare, mașina lui Redheffer cîntărește aproximativ 2 kg și folosește numai patru întrerupătoare rotative. Mai recent, un robot care joacă nim, denumit Nimrod, a fost prezentat la Festivalul britanic din 1951, iar apoi la Tîrgul din Berlin. După cum relatează A.M. Turing (în cap. 25 din cartea *Faster Than Thougt*, editată de B.V. Bowden, 1953), mașina s-a bucurat de un asemenea succes la Berlin, încît vizitatorii „au ignorat cu desăvîrșire barul de la celălalt capăt al sălii, la care se serveau gratuit băuturi, și a fost nevoie să se facă apel la un număr mai mare de polițiști pentru a ține în frîu mulțimea. Mașina a devenit și mai populară, după

ce l-a învins în trei jocuri consecutive pe dr. Erhard, pe atunci ministru al economiei".

Dintre numeroasele variante de nim complet analizate, prezintă un interes deosebit cea propusă în 1910 de matematicianul american Eliakim H. Moore. Regulile sînt aceleași ca la nimul obișnuit, numai că jucătorii au dreptul să ia din orice număr de linii cel mult k monede. În mod surprinzător, analiza binară de mai sus rămîne valabilă, cu condiția ca poziția protejată să fie definită ca una în care fiecare coloană de numere binare să aibă totalul divizibil prin $k + 1$.

Celelalte variante ale jocului de nim nu par să aibă o strategie simplă pentru un joc rațional. După părerea mea, cea mai interesantă dintre aceste versiuni, pînă în prezent neanalizate, a fost inventată în urmă cu vreo 10 ani, de către Piet Hein din Copenhaga. (Hein este și inventatorul jocului topologic *hex*, de care ne-am ocupat în cap. 8.)

În varianta lui Hein, denumită *tac tix* în țările de limbă engleză și *bulo* în Danemarca, monedele sînt așezate în formă de pătrat, așa cum se vede în fig. 88. Jucătorii iau monedele pe rînd, dar au voie să le scoată din orice linie orizontală sau verticală. Monedele scoase trebuie să fie totdeauna vecine, nu se admit goluri între ele. De exemplu, dacă primul jucător a scos cele două monede din mijloc

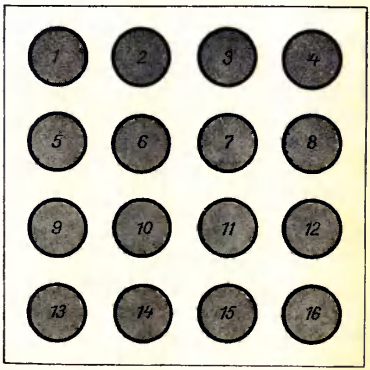


Fig. 88 Jocul tac tix al lui Piet Hein.

ale primei linii orizontale, adversarul nu poate lua dintr-o singură mutare pe cele două rămase.

Tac tix trebuie jucat în formă inversă, adică pierde jucătorul care ia ultima monedă, deoarece jocul normal devine banal printr-o strategie simplă. În cazul unor pătrate cu număr impar de monede pe fiecare latură, primul jucător cîştigă, luînd moneda din centru şi făcînd apoi un joc simetric celui al adversarului. La pătratele cu număr par de monede pe fiecare latură, al doilea jucător cîştigă, jucînd simetric de la început. Nu se cunoaşte o strategie comparabilă pentru jocul invers, deşi nu este greu de arătat că la un pătrat de 3×3, primul jucător poate cîştiga luînd moneda din centru sau una dintr-un colţ, sau toate monedele din linia sau coloana de mijloc.

Principiul ingenios care stă la baza jocului de tac tix, acela al mulţimilor secante, a fost aplicat de Hein la mai multe configuraţii bi- şi tridimensionale. Se poate juca, de exemplu, pe table triunghiulare şi hexagonale, sau aşezînd monedele în vîrfurile şi la intersecţiile unei pentagrame sau hexagrame. Se pot folosi şi intersecţiile unor curbe închise: aici toate monedele de pe aceeaşi curbă sînt considerate ca aparţinînd aceleiaşi „linii". Dar forma pătrată combină configuraţia cea mai simplă cu maximul de complexitate strategică. Ea este destul de greu de analizat, chiar în forma elementară de 4×4, şi, bineînţeles, pe măsură ce creşte mărimea pătratelor, creşte rapid şi complexitatea jocului.

O analiză superficială a jocului sugerează că mutările simetrice pot asigura cîştigul celui de-al doilea jucător la un pătrat de 4×4, cu o singură modificare banală la ultima mutare. Din nefericire, există numeroase situaţii în care jocul simetric nu este eficace. De exemplu, consideraţi următorul joc tipic, în care al doilea jucător adoptă o strategie simetrică:

PRIMUL JUCĂTOR	AL DOILEA JUCĂTOR
1. *5 — 6*	*11 — 12*
2. *1*	*16*
3. *4*	*13*
4. *3 — 7 (cîştigă)*	

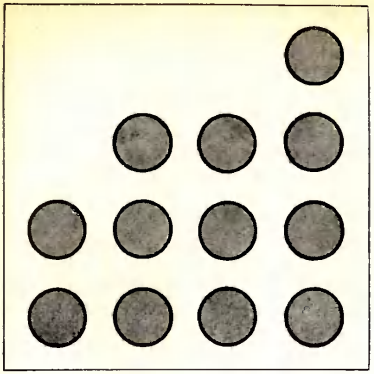
În acest exemplu, mutarea iniţială a celui de-al doilea jucător este fatală. După ce adversarul său răspunde cum am indicat, al doilea jucător nu-şi mai poate impune cîştigul, nici măcar dacă adoptă simetria în toate mutările sale ulterioare.

Jocul este mult mai complex decît pare la prima vedere. Într-adevăr, nu se ştie încă dacă primul sau al doilea jucător îşi poate impune cîştigul, nici măcar la o tablă de 4 × 4 din care au fost scoase cele patru piese de la colţuri. Ca iniţiere în acest joc, încercaţi să rezolvaţi cele două probleme de tac tix (propuse de P. Hein) din fig. 89. În fiecare din cele două poziţii, aveţi de găsit o mutare care să asigure cîştigul. Poate că un cititor iscusit va putea răspunde la întrebarea mai dificilă: Cine cîştigă la un joc de 4 × 4, primul sau al doilea jucător?

ADAOS

Seville Chapman, directorul sectorului de fizică de la Cornell Aeronautical Laboratory Inc., de pe lîngă Universitatea Cornell, mi-a trimis o diagramă de sîrmă pentru o maşină de nim portabilă, foarte bine gîndită, pe care a construit-o în 1957. Dispozitivul cîntăreşte 34 de uncii şi foloseşte trei întrerupătoare rotative cu care pot fi mînuite trei linii de 4 pînă la 10 monede. Cînd ia prima monedă, maşina poate să cîştige totdeauna. Există o cale destul de elegantă de a demonstra aceasta. Dacă ne amintim de cele trei linii din forma matricială descrisă mai sus, este clar că fiecare linie trebuie să aibă un 1 în coloana 8 sau 4, dar nu în ambele. (Cele două spaţii nu pot fi goale, deoarece atunci numărul de monede din linie ar fi mai mic de 4, şi ambele nu pot conţine 1, deoarece atunci numărul monedelor ar fi mai mare de 10.) Există numai două căi pentru ca aceşti trei de 1 (cîte unul pentru fiecare linie) să poată fi aşezaţi în cele două coloane: toţi trei în aceeaşi coloană, sau doi într-o coloană şi unul în cealaltă. În ambele cazuri, o coloană trebuie să aibă suma impară, făcînd poziţia iniţială neprotejată şi garantînd astfel cîştigul maşinii, dacă ea începe jocul.

Următorii cititori au trimis analize detaliate ale jocului tac tix de 4 × 4: Theodore Katsanis, Ralph Hinrichs, William Hall şi C.D. Coltharp, Paul Darby, D.R. Horner, Alan McCoy, P.L. Rotherberg şi A.A. Marks, Robert Caswell, Ralph Queen, Herman Gerber, Joe Greene şi Richard Dudley. Nu a fost descoperită nici o strategie simplă, dar nu mai este nici o îndoială că al doilea jucător poate cîştiga oricînd, atît în cazul acesta, de 4 × 4, cît şi în cazul cînd se înlătură monedele de la colţuri. S-a emis ipoteza că la orice tablă pătrată sau dreptunghiulară avînd cel puţin o



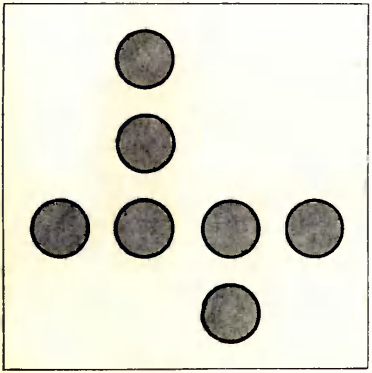


Fig. 89 Două probleme de tac tix.

latură mpară, primul jucător poate cîștiga, luînd de la prima mutare linia din mijloc în întregime, și că la cîmpuri cu laturi pare, cîștigul revine celui de-al doilea jucător. Dar această ipoteză nu a fost încă demonstrată.

După cum stau lucrurile în prezent, tabla ideală pentru experții în tac tix, care și-au însușit jocul de 4×4, este cea de 6×6, ea fiind destul de mică pentru ca jocul să nu dureze prea mult și să nu devină obositor, însă destul de complexă pentru a-i asigura interesul și neprevăzutul.

RĂSPUNSURI

Prima problemă de tac tix (fig. 89) poate fi cîștigată în diverse feluri: de exemplu, 9—10—11—12 sau 4—8—12—16. A doua problemă se cîștigă, luînd 9 sau 10.

Capitolul 16 STÎNG SAU DREPT?

Recenta „descoperire minunată și îmbucurătoare" (cum a denumit-o Robert Oppenheimer) că particulele elementare pot avea o orientare stîngă sau una dreaptă deschide gîndirii noi domenii. Au oare toate particulele elementare din univers aceeași orientare? Vor fi oare reconstituite vreodată ambele fețe ale naturii, descoperindu-se că unele galaxii sînt formate din antimaterie, adică din materie constituită din particule care „merg pe cealaltă cale", cum a spus Alice despre obiectele văzute prin oglinda ei? Poate că vom înțelege mai bine aceste considerații filozofice, dacă le vom aborda prin prisma unui joc.

Reflectările într-o oglindă sînt atît de puternic integrate în viața noastră de toate zilele, încît avem impresia că le înțelegem complet. Totuși, numeroși oameni nu mai știu ce să răspundă cînd sînt întrebați: „De ce inversează o oglindă stînga cu dreapta, dar nu și susul cu josul?" Întrebarea stîrnește cu atît mai multă confuzie, cu cît este ușor să construim oglinzi care să nu inverseze stînga cu dreapta. Platon, în *Timeu*, și Lucrețiu, în *Despre natura lucrurilor*, descriu o astfel de oglindă confecționată dintr-un dreptunghi de metal lustruit, căruia i s-a dat o formă ușor concavă, cum se vede în ilustrația din mijloc, fig. 90. Dacă vă uitați într-o astfel de oglindă, vă veți vedea fața așa cum o văd ceilalți. Oglindirea unei pagini tipărite poate fi, și ea, citită fără dificultate.

O cale și mai simplă de a confecționa o oglindă care nu inversează imaginile constă în a așeza două oglinzi, de preferință neîncadrate, astfel încît să formeze un unghi drept, cum se vede în fig. 90 dreapta. Dacă rotiți această oglindă (ca și pe cea descrisă mai sus) cu 90°, ce se va întîmpla cu imaginea obrazului dv. ? Partea de sus va apărea jos.

O structură este simetrică dacă rămîne neschimbată, cînd o reflectăm într-o oglindă obișnuită. Ea poate fi suprapusă peste oglindirea ei, ceea ce nu este posibil la structurile asimetrice. Formele gemene ale tuturor obiectelor asimetrice se deosebesc adesea prin faptul că îi dăm uneia denumirea de „dreaptă", iar celeilalte denumirea de „stîngă". Oricît le-am cerceta sau le-am măsura, nu vom descoperi la una vreo proprietate pe care să nu o aibă și cealaltă, și totuși ele sînt foarte diferite. Aceasta l-a intrigat pe Immanuel Kant. „Ce poate semăna mai mult cu mîna mea", scrie el, „și să fie mai identic în toate privințele, decît imaginea ei în oglindă? Și totuși nu pot să pun mîna pe care o văd în oglindă în locul originalului ei".

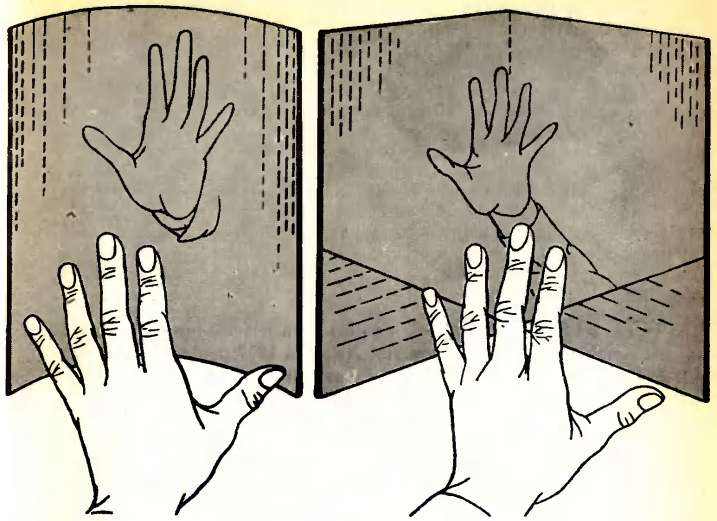
Această curioasă dualitate se întîlnește în structuri cu orice număr de dimensiuni, inclusiv la cele cu mai mult de trei. De exemplu, un segment de dreaptă este simetric în lungul unicei sale dimensiuni; dacă vom considera însă un segment lung, urmat de unul scurt, modelul devine asimetric. Dacă le oglindim în lungul dimensiunii liniare căpătăm un segment scurt urmat de unul lung. Dacă ne imaginăm cuvintele tipărite, ca simboluri ordonate într-o singură dimensiune, cele mai multe cuvinte sînt asimetrice, deși există cuvinte palindromice, ca „radar" sau „potop" care se citesc la fel de la stînga spre dreapta și de la dreapta spre stînga. Există chiar propoziții palindromice. Iată cîteva exemple, în engleză: *„Draw pupil's lip upward"*; *„Egad! A base tone denotes a bad age"*; și prima observație a lui Adam, *„Madam, I'm Adam"* (la care Eva răspunde adecvat „Eve"). Din cînd în cînd, poeții recurg la șiruri de sunete palindromice. Un exemplu caracteristic este binecunoscuta poezie a lui Robert Browning, *Întîlnire nocturnă*, în care schema *abccba* a rimei în fiecare strofă avea menirea să sugereze mișcarea valurilor mării despre care este vorba în poem.

Melodiile pot fi considerate, și ele, ca tonuri ordonate în lungul dimensiunii unice a timpului. În secolul al XV-lea erau la modă canoanele palindromice, în care melodia imitatoare era inversarea primei melodii. Numeroși compozitori (printre care Haydn, Bach, Beethoven, Hindemith și Schönberg) au utilizat astfel de scheme pentru a obține efecte de contrapunct. Cele mai multe melodii însă sună supărător, cînd sînt cîntate de-a-ndaratelea.

Fig. 90 O oglindă obișnuită și imaginea ei (*stînga*) și două oglinzi care nu inversează imaginea (*centru și dreapta*).

Diverse experimente amuzante cu oglindiri muzicale se pot efectua cu un magnetofon. Muzica de pian, cîntată de-a-ndaratelea sună ca muzica de orgă, deoarece fiecare ton începe cu o intensitate mică și crește ca volum. Efecte deosebit de stranii se pot obține cîntînd muzică de-a-ndaratelea într-o cameră cu ecou, înregistrînd-o totodată pe un alt magnetofon. Inversînd al doilea magnetofon, notele își recapătă ordinea inițială, însă ecourile preced sunetele.

Un alt tip de oglindire muzicală constă în a inversa banda unui pian mecanic, astfel încît să cînte normal, dar cu notele înalte și joase inversate, adică muzica inversată pe care ar produce-o un pianist, cîntînd în maniera normală pe oglindirea unui pian. Melodia devine de nerecunoscut și se produce o surprinzătoare transpoziție între gamele minore și cele majore. Și acest procedeu



a fost folosit în canoanele Renașterii, precum și în contrapunctul unor compozitori de mai tîrziu. Un exemplu clasic îl constituie *Arta fugii* a lui Bach, în care fugile a 12-a și a 13-a pot fi inversate. Mozart a scris o dată un canon în care melodia a doua era formată din cea dintîi, inversată de la stînga spre dreapta și de jos în sus, astfel încît doi instrumentiști puteau citi notele așezîndu-se de ambele părți ale foii.

Dacă ne îndreptăm acum atenția spre structurile bidimensionale, vedem că o configurație cum ar fi crucea este simetrică, pe cînd monada chineză, un vechi simbol religios (fig. 91), nu este. Aria întunecată și cea luminoasă, denumite Yin și Yang, simbolizează toate dualitățile fundamentale, inclusiv stîng-drept și baza ei combinatorie în numerele pare și impare. Frumoasa asimetrie a

monadei face să ne pară ca o coincidență fericită faptul că cei doi fizicieni care au primit premiul Nobel în 1957 pentru lucrarea teoretică în care se răsturna ideea parității au fost doi chinezi (unul dintre ei se numește Yang!). Spre deosebire de cazul muzicii, toate schemele și desenele asimetrice pot fi „răsturnate", fără să-și piardă valoarea estetică. În adevăr, Rembrandt a făcut odată o răsturnare a gravurii sale *Coborîrea de pe cruce*. S-a susținut că obișnuința de a citi de la stînga spre dreapta ar putea exercita o influență subtilă asupra reacțiilor unui occidental în fața unei picturi reflectate, dar dacă este așa, această influență pare să fie foarte mică.

Dat fiind că cuvintele tipărite formează scheme asimetrice, oglindirile tipăriturilor sînt de obicei ilizibile, dar nu totdeauna. Dacă vă uitați la oglindirea cuvintelor CHOICE QUALITY („calitate superioară") de pe latura unui pachet de țigări Camel, ținînd pachetul în așa fel încît partea lui de sus să fie spre dreapta dv., veți fi uimit de ceea ce veți constata. „QUALITY" este indescifrabil, pe cînd „CHOICE" este neschimbat! Motivul este, firește, acela că „choice", tipărit cu majuscule are o axă de simetrie și deci, superpozabil peste oglindirea sa, dacă-l întoarcem cu partea de sus în jos. Alte cuvinte ca „TOMATO" (pătlăgică roșie) și „TIMOTHY" sînt asimetrice tipărite orizontal, dar capătă o axă de simetrie dacă sînt așezate vertical.

Cînd luăm în considerare structuri cunoscute, cu trei dimensiuni, constatăm că ele sînt un curios amestec de simetrie și asimetrie. Numeroase forme vii sînt simetrice morfologic, cu unele excepții remarcabile ca scoicile spirale, cleștii crabului, ciocul încrucișat al unor specii de păsări și ochii unilaterali ai calcanului. Pînă și schemele de comportament sînt uneori asimetrice. De exemplu, mișcările giratorii, în sens opus mersului acelor de ceasornic, ale liliecilor care ies din cavernele de la Carlsbad. Cele mai multe obiecte făcute de mîna omului sînt, de asemenea, simetrice, deși unele care par astfel se dovedesc asimetrice, la o cercetare mai atentă, cum ar fi foarfecele, benzile Moebius, hexaflexagoanele și nodurile simple. Cele două noduri din fig. 92 au proprietăți topologice identice, dar nici unul nu poate fi deformat în așa fel, încît să-l obținem pe celălalt. Zarurile au și ele două forme distincte. Există două căi de a marca punctele pe fețele unui zar, astfel încît punctele de pe fețele opuse să aibă totdeauna suma 7. Ele sînt una oglindirea celeilalte.

Deoarece a încrucișa brațele este tot una cu a le lega într-un nod simplu, rezultă că există două moduri de a încrucișa brațele, deși sîntem cu toții atît de antrenați în unul din ele, încît este supărător de greu să efectuăm oglindirea lui. Încrucișați-vă brațele așa cum faceți de obicei, apucați cu fiecare mînă cîte unul din cele două capete ale unui șiret, apoi desfaceți brațele, și veți transfera nodul format cu brațele asupra șiretului. Repetați experimentul, încrucișînd brațele invers, și veți obține un nod care este reflectarea celui dintîi. O problemă fascinantă (și nerezolvată) a topologiei constă în a demonstra că două noduri care sînt unul oglindirea celuilalt într-o curbă închisă nu pot fi făcute să se anuleze unul pe celălalt prin deformarea curbei. Nimeni nu a reușit să realizeze aceasta, deși este ușor să împingem un nod în celălalt și să formăm un dublu nod simetric. Dacă executați aceasta cu două noduri de aceeași orientare, obțineți un nod asimetric.

Chestiunile acestea nu sînt banale. Faptul că anumite particule sînt cunoscute ca fiind asimetrice, într-un anumit sens spațial încă necunoscut, impune fizicii teoretice sarcina de a arăta că dacă o particulă își întîlnește antiparticula, ele se anihilează și dau o energie simetrică. Alice se uita în oglinda ei și se întreba dacă laptele reflectat este bun de băut. De cîtva timp s-a aflat că un astfel de lapte nu ar fi digerabil, deoarece enzimele corpului nostru, construite în așa fel încît să acționeze asupra unor molecule stîngi, nu pot face față unora drepte. S-ar părea că situația ar putea fi și mai gravă.

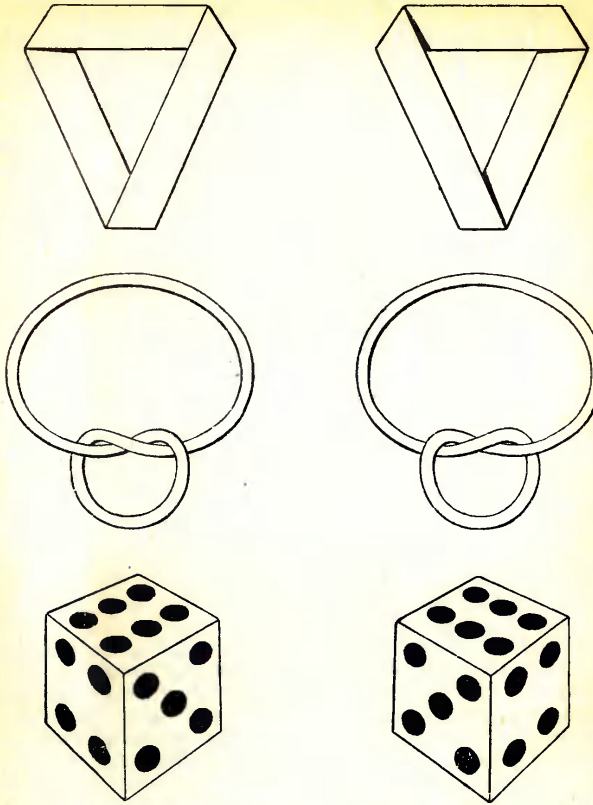


Fig. 92 Bandă Moebius dreaptă și stîngă (*sus*), noduri încrucișate (*mijloc*) și zaruri (*jos*).

Recentele experimente de paritate sugerează cu tărie ideea că o particulă și antiparticula ei nu sînt, în realitate, decît oglindiri ale aceleiași structuri. Dacă aceasta este adevărat, cum bănuiesc și speră cei mai mulți fizicieni, atunci orice încercare a lui Alice de a bea lapte reflectat va duce la o explozie violentă, la fel cu explozia suferită de dr. Edward Teller cînd a dat mîna (cum a descris el însuși atît de dramatic în ziarul „The Newyorker" din 15 decembrie 1956) cu dr. Edward Anti-Teller. Putem spune, fără teama de a greși, că fizicienii vor mai lucra mult timp la problemele de stîng și drept.

ADAOS

Întrebarea din aliniatul al doilea al acestui capitol ne-a adus următoarea scrisoare de la dr. Robert D. Tschirgi și dr. John Langdon Taylor Jr., ambii de la catedra de fiziologie a Școlii de medicină de la Centrul medical al Universității din California (Los Angeles).

Domnilor,

Distractivul și atrăgătorul articol despre simetrie al lui Martin Gardner a reamintit cititorilor dv. întrebarea chinuitoare: „De ce o oglindă inversează stînga cu dreapta, dar nu și jos cu sus?" În ciuda descrierilor pline de înțeles ale razelor luminoase și ale principiilor optice care sînt date, de obicei, ca răspuns la această întrebare, pare să existe o bază mult mai profundă care, după cum presupun autorii acestei scrisori, se situează, în primul rînd, în domeniul psihofiziologiei.

Oamenii sînt bilateral simetrici, dacă-i privim superficial și în mare, dar subiectiv și comportamental, ei sînt relativ asimetrici. Simplul fapt că putem distinge dreapta noastră de stînga noastră implică o asimetrie a sistemului perceptiv, cum a remarcat Ernst Mach în 1900. Sîntem, astfel, pînă la un anumit punct, o minte asimetrică sălășluind într-un corp cu simetrie bilaterală, cel puțin în limitele inspecției vizuale obișnuite a formei noastre exterioare. Termenul de simetrie e utilizat aici într-un context informațional și arată că observatorul nu poate face altă distincție decît de sens între două sau mai multe elemente ale cîmpului său perceptiv. Natural, rafinîndu-și observațiile, el poate dobîndi informații despre alte neasemănări, și atunci sistemul considerat încetează de a mai fi simetric.

Cînd stăm în fața unei oglinzi, vedem reflectată o structură superficial bilateral simetrică, și sîntem induși în eroare de această simetrie aparentă, ceea ce ne face să tratăm sistemul ca și cum noi și imaginea noastră am fi identități, și nu entități enantiomorfe (de sens opus). De aceea, prin proiectare psihologică, ne face impresia că sîntem capabili să rotim imaginea corpului nostru cu 180° în spațiul tridimensional, în jurul unei axe verticale, și să-l mutăm la o distanță egală cu dublul distanței pînă la oglindă, realizînd astfel o coincidență între trupul nostru și reflectarea lui. Prin acest proces, am imaginat mecanismul perceptiv identificator din sistemul nostru nervos central, care se află în interiorul nostru, și nu imaginea enantiomorfă, existentă în oglindă. Prin urmare, sîntem conduși la afirmația eronată că, atunci cînd ne mișcăm mîna dreaptă, imaginea din oglindă își mișcă mîna stîngă. Dacă, într-un mod mai corect, ne închipuim eul nostru enantiomorf din oglindirea noastră, atunci înțelegem că definițiile sale pentru drept și stîng vor fi inversate. și cînd mișcăm ceea ce am definit pentru noi că este mîna dreaptă, ea mișcă ceea ce am definit pentru ea ca fiind mîna dreaptă. Trebuie să înzestrăm oglindirea noastră, nu cu sistemul nostru de coordonate, ci cu un sistem de coordonate oglindit. Aceasta se poate ilustra ușor, luînd o pungă de hîrtie într-o mînă și redefinind axele majore ale corpului nostru ca fiind „cap-picioare", „față-spate" și „mînă-pungă" (în loc de stîng-drept). Acum, așezați-vă în fața oglinzii și observați că atunci cînd vă mișcați capul, imaginea din oglindă își mișcă și ea capul; cînd vă mișcați picioarele, imaginea din oglindă își mișcă picioarele; cînd vă mișcați mîna, imaginea din oglindă își mișcă și ea mîna; iar cînd mișcați punga, imaginea din oglindă mișcă punga. Ce s-a întîmplat cu inversarea drept-stîng? Ea s-a risipit, ca o himeră ce este, prin simplul procedeu de a face ca structura noastră superficială să nu mai fie, în mod vădit, bilateral simetrică. Nu mai este cu putință acum să obținem o coincidență esențială între noi și oglindirea noastră, printr-o rotație de 180° în jurul axei noastre verticale, nici în jurul vreunei alte axe, și ne dăm seama de natura enantiomorfă a reflectării noastre.

Pentru a ilustra în ce fel convenția unei rotații în jurul unei axe verticale ne impune noțiunea inversării drept-stîng în oglindă, la alte obiecte decît noi înșine, să considerăm o hartă, orientată în mod obișnuit, cu nordul sus și cu estul în dreapta. Pentru a observa oglindirea acestei hărți, rotim uniform harta în jurul axei ei nord-sud, în fața unei oglinzi. Această obișnuință derivă, fără îndoială, din faptul că cele mai multe dintre mișcările noastre destinate să inspecteze ambianța comportă o rotație în jurul axei noastre verticale. De exemplu, dacă

harta ar fi fixată de perete în fața oglinzii, am observa harta direct și apoi ne-am roti în jurul axei noastre verticale, pentru a vedea oglindirea hărții. În ambele cazuri, estul va fi acum în stînga noastră, pe cînd nordul va rămîne sus. Dacă rotim însă harta în jurul axei est-vest ca s-o aducem în fața oglinzii, sau dacă privim oglindirea hărții din perete, stînd cu capul în jos, estul rămîne în dreapta, dar nordul ajunge jos. Ne apare acum că oglinda a inversat susul și josul, nu dreapta și stînga.

Unicul sistem de coordonate determinat este cel pe care observatorul îl impune ambianței sale, iar axele vor fi astfel potrivite, încît originea să ajungă în orice punct din spațiul perceptiv al observatorului. Dacă descriem părțile unui obiect în comparație cu un altul, ne potrivim, în general, sistemul de coordonate în așa fel, încît originea să ajungă în interiorul obiectului, și astfel ea capătă axe sus-jos, față-spate și dreapta-stînga, corespunzătoare celor ale observatorului. Dat fiind că obiectele se rotesc în acest sistem, fie prin mișcarea obiectului, fie prin mișcarea sistemului de coordonate (adică a observatorului), unele dintre valorile coordonatelor obiectului își vor schimba semnul. Rotirea unui obiect în jurul axei verticale duce la o schimbare de semn între dreapta-stînga și față-spate; în jurul axei dreapta-stînga, la o schimbare de semn la față-spate și la sus-jos; iar în jurul axei față-spate, la o schimbare de semn la sus-jos și dreapta-stînga. Dar, o dată ce observatorul definește sistemul de coordonate, rotirea observatorului nu duce la o schimbare de semn a părților comparate ale observatorului. Astfel, dacă privim imaginea în oglindă stînd cu capul în jos, continuăm să interpretăm eronat că oglinda inversează dreapta și stînga, deoarece în procesul de răsturnare a corpului nostru, am inversat sistemul de coordonate.

După ce această scrisoare a apărut în „Scientific American" (mai, 1958), revista a primit următoarea notă de la R.S. Wiener din Stamford, Connecticut:

Domnilor,

După citirea interesantelor comentarii ale doctorilor Tschirgi și Taylor asupra întrebării „De ce inversează oglinda stînga și dreapta, dar nu și sus și jos?", am încercat să verific unele dintre observațiile lor.

Am luat o hartă (mai exact cea a strîmtorii Long Island, partea de vest) și am pus-o pe peretele opus oglinzii toaletei mele. Stînd cu capul în jos în fața oglinzii, am constatat că nu-mi pot vedea imaginea în întregime. Tot ce puteam vedea erau două picioare. Cel pe care l-am recunoscut ca fiind piciorul pe care-l numesc de obicei stîng, acoperea partea din hartă unde este regiunea Bridgeport, pe cînd celălalt picior se afla în vecinătatea lui East River.

Am făcut apoi experimentul cu o pungă de hîrtie peste piciorul „stîng". Punga hoinărea acum pe lîngă Bridgeport. Experimentul nu părea să fie cine știe ce, de aceea am scos toaleta afară din casă, am luat oglinda din perete și am așezat-o pe parchet, sprijinind-o de perete.

M-am așezat din nou cu capul în jos în fața oglinzii. Imaginea structurii superficial bilateral simetrice, cu capul în jos și cu punga îmbrăcată peste un picior, era așa de înfiorătoare, încît am hotărît să renunț la întreaga experimentare.

CARTEA
A DOUA

Capitolul 1 CELE CINCI SOLIDE PLATONICE

Un poligon regulat este o figură plană, mărginită de segmente de dreaptă, avînd laturile egale și unghiurile interioare egale. Natural, există o infinitate de astfel de figuri. În trei dimensiuni, analogul poligonului regulat este poliedrul regulat: un corp solid, mărginit de poligoane regulate, avînd fețele congruente și unghiurile interioare congruente la vîrfuri. S-ar putea crede că și aceste forme sînt infinit de multe, dar în realitate sînt „în număr supărător de mic", cum s-a exprimat odată Lewis Carroll. Există numai cinci solide convexe regulate: tetraedrul, hexaedrul (cubul), octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul (fig. 93).

Primul studiu sistematic al celor cinci solide regulate pare să fi fost făcut de vechii pitagoreici. Ei credeau că tetraedrul, cubul, octaedrul și icosaedrul ar sta respectiv la baza structurii celor patru elemente tradiționale: focul, pămîntul, aerul și apa. Dodecaedrul era identificat, într-un mod obscur, cu universul în totalitatea lui. Deoarece aceste noțiuni au fost dezvoltate în *Timeul* lui Platon, poliedrele regulate au ajuns să fie cunoscute sub denumirea de solide platonice. Frumusețea și proprietățile matematice fascinante ale acestor cinci forme i-au preocupat pe învățați începînd din timpul lui Platon și pînă la sfîrșitul Renașterii. Analiza solidelor platonice este dată în ultima carte a lui Euclid, care este încununarea *Elementelor* sale. Johannes Keppler a crezut toată viața că orbitele celor șase planete cunoscute pe vremea sa puteau fi obținute așezînd cele cinci solide într-o ordine anumită în interiorul orbitei lui Saturn. Astăzi, matematicienii nu mai privesc solidele platonice cu un asemenea respect mistic, însă rotațiile lor sînt studiate în cadrul teoriei grupurilor, și ele continuă să joace un rol important în matematica recreativă. Aici vom examina pe scurt cîteva divertismente matematice în care intervin.

Există patru moduri diferite în care un plic lipit poate fi decupat și împăturit ca să dea un tetraedru. Următoarea metodă este, poate,

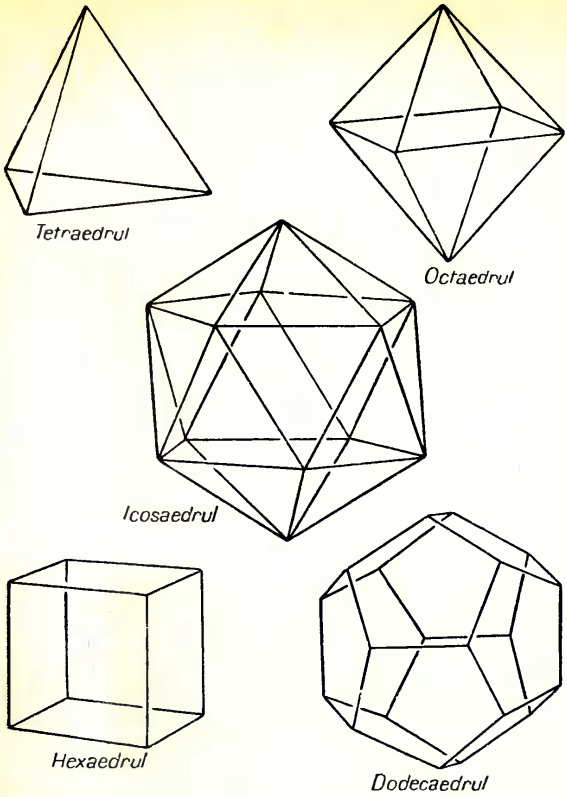


Fig. 93. Cele cinci solide platonice. Cubul și octaedrul sînt „duale", în sensul că, dacă centrele tuturor perechilor de fețe vecine ale unui poliedru sînt legate prin segmente de dreaptă, acestea formează muchiile celuilalt. Dodecaedrul și icosaedrul sînt înrudite dual în același mod. Tetraedrul este propriul său dual.

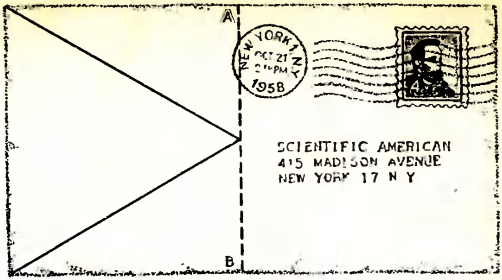


Fig. 94 Cum putem decupa un plic lipit pentru a obține un tetraedru

cea mai simplă. Desenați un triunghi echilateral pe ambele părți ale unui capăt al plicului (fig. 94). Tăiați apoi ambele foi ale plicului, așa cum arată linia întreruptă din figură, după care îndepărtați partea din dreapta. Îndoind hîrtia în lungul laturilor triunghiurilor din față și din spate, punctele A și B sînt reunite, pentru a forma tetraedrul.

Figura 95 prezintă modelul unui mic joc captivant, confecționat dintr-un material plastic și întîlnit adesea în comerț. Vă puteți

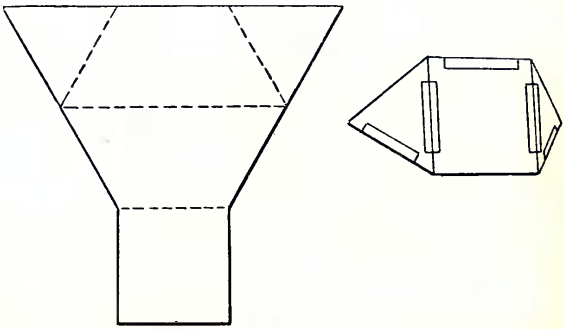


Fig. 95 Un model (*stînga*) din care poate fi obținut un solid (*dreapta*); două solide din acestea formează un tetraedru.

confecționa jucăria singuri, decupînd modele din acestea dintr-o hîrtie mai groasă. (Toate segmentele de dreaptă, cu excepția unuia mai lung, au aceeași lungime.) Îndoiți fiecare model în lungul liniilor și lipiți muchiile pentru a obține solidul arătat. Acum încercați să potriviți cele două solide, astfel încît să faceți tetraedrul. Unul dintre amicii mei matematicieni se amuză să-și plictisească prietenii cu un truc, bazat pe acest joc. El a cumpărat două garnituri din aceste piese din material plastic, astfel încît poate să ascundă o a treia piesă în palmă. El așază un tetraedru pe masă, apoi îl strivește cu mîna și în același timp dă drumul piesei ascunse.

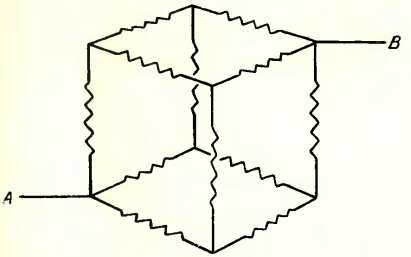


Fig. 96 Enigmă cu o rețea electrică.

Bineînțeles, prietenii săi nu izbutesc să construiască tetraedrul din *trei* piese.

Referitor la cub, voi menționa o singură enigmă electrică, și anume faptul surprinzător că un cub poate să treacă printr-o gaură dintr-un cub mai mic. Dacă veți ține un cub în așa fel încît un vîrf să fie îndreptat direct spre dv., iar muchiile să delimiteze un hexagon, vă veți da imediat seama că este loc suficient pentru o gaură pătrată care poate fi ceva mai mare decît fața cubului. Enigma electrică se bazează pe rețeaua din fig. 96. Dacă fiecare muchie a cubului cuprinde o rezistență de 1 Ω (ohm), atunci care este rezistența întregii structuri cînd curentul trece de la *A* la *B*? Se știe că inginerii electricieni au umplut pagini întregi cu calcule la această problemă, deși soluția adecvată se vede imediat.

Toate cele cinci solide platonice au fost folosite ca zaruri. După cub, cel mai popular pare să fi fost octaedrul. Schema din fig. 97, cu fețele numerotate după cum se arată, poate fi îndoită în așa

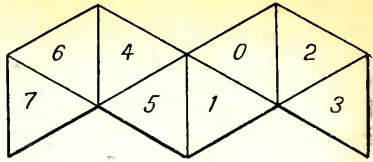


Fig. 97 Bandă marcată pentru confecționarea unui zar octaedral.

fel încît să dea un octaedru destul de precis, ale cărui muchii deschise se pot lipi cu hîrtie transparentă. Fețele opuse ale acestui zar totalizează, ca și la zarul cubic obișnuit, numărul 7. Mai mult, acest aranjament al numerelor face posibil un mic tur de forță de citire a gîndurilor. Cereți cuiva să se gîndească la un număr cuprins între 0 și 7. Țineți în fața sa octaedrul, astfel încît să vadă numai numerele 1, 3, 5 și 7, și întrebați-l dacă vede numărul ales. Dacă spune „da", răspunsul are valoarea 1. Rotiți solidul, astfel încît să vadă fețele cu 2, 3, 6 și 7, și repetați întrebarea. De astă dată, „da" înseamnă 2. Ultima întrebare o puneți întorcînd solidul astfel încît să vadă fețele 4, 5, 6 și 7. Aici răspunsul „da" are valoarea 4. Dacă totalizați acum valorile celor trei răspunsuri, obțineți numărul ales, fapt pe care îl va explica ușor oricine este familiarizat cu sistemul binar. Pentru a ușura găsirea celor trei poziții în care trebuie să țineți solidul, însemnați-vă, pur și simplu, într-un anumit fel, cele trei vîrfuri care trebuie să fie îndreptate spre dv., cînd prezentați zarul spectatorului.

Există și alte moduri interesante de a numerota fețele unui zar octaedral. De exemplu, putem aranja numerele 1—8 în așa fel, încît totalul celor patru fețe din jurul fiecărui vîrf să fie o constantă. Constanta trebuie să fie 18, dar există trei căi distincte (fără a socoti rotațiile și oglindirile), în care putem numerota fețele în acest mod.

O cale elegantă de a construi un dodecaedru este expusă în cartea lui Hugo Steinhaus *Mathematical Snapshots**. Decupați din carton gros două modele ca cel din stînga din fig. 98. Pentagoanele trebuie să aibă latura de aproximativ un țol. Crestați marginea fiecărui pentagon central cu vîrful unui briceag, astfel încît pentagoanele să se îndoaie ușor într-o singură direcție. Așezați modelele împreună, cum se arată în fig. 98 dreapta, astfel încît pentagoanele fiecărui model să se îndoaie spre celelalte. Împletiți o panglică de cauciuc, alternativ

* Instantanee matematice. — *N.R.*

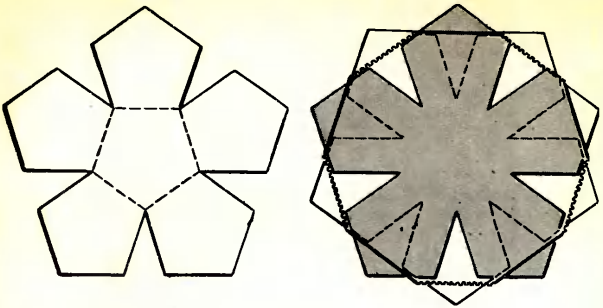


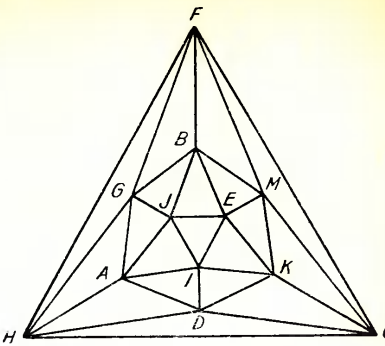
Fig. 98 Două modele identice de carton sînt legate împreună cu un elastic, ca să dea un dodecaedru care-și ia singur forma.

deasupra și dedesubtul capetelor care ies afară, ținînd modelul plan. Cînd îi dați drumul, dodecaedrul își va lua forma spațială printr-un salt magic.

Dacă fețele acestui model sînt colorate, fiecare față cu o anumită culoare, care este numărul minim de culori necesare pentru ca să fim siguri că nici o muchie nu va avea aceeași culoare de ambele părți? Răspunsul este patru, și nu este greu să descoperim cele patru căi diferite în care culorile pot fi aranjate (două sînt imaginea în oglindă a celorlalte două.) Tetraedrul necesită și el patru culori, în două aranjamente, unul fiind oglindirea celuilalt. Cubul are nevoie de trei culori, iar octaedrul de două, fiecare cu cîte un singur aranjament posibil. Icosaedrului îi trebuie trei culori: aici avem nu mai puțin de 144 de modele diferite, dintre care numai șase sînt identice cu imaginile lor într-o oglindă.

Dacă o muscă ar umbla în lungul celor 12 muchii ale unui icosaedru, parcurgînd fiecare muchie cel puțin o dată, care este cea mai scurtă distanță pe care s-ar putea deplasa? Musca nu trebuie să revină la punctul de unde a plecat și este necesar ca ea să parcurgă anumite muchii de două ori. (Numai muchiile octaedrului pot fi parcurse fără reveniri.) O proiecție în plan a icosaedrului (fig. 99) poate fi utilizată la rezolvarea acestei probleme, dar trebuie ținut minte că fiecare muchie are lungimea egală cu o unitate. (Nu am putut rezista să tăinuiesc o scurtă felicitare în felul în care sînt no-

Fig. 99 Proiecția în plan a unui icosaedru.



tate vîrfurile în această diagramă. Pentru a o găsi, nu este nevoie să rezolvați problema.)

Întrucît se mai găsesc maniaci care persistă în încercările de a realiza trisecția unghiului sau cvadratura cercului, deși s-a demonstrat de mult imposibilitatea lor, de ce n-au existat eforturi comparabile pentru a găsi mai mult decît cinci poliedre regulate? Un motiv este că „se vede" foarte ușor că nu sînt posibile mai multe. Următoarea demonstrație simplă provine încă de la Euclid.

Un vîrf al unui poliedru trebuie să aibă cel puțin trei fețe. Să considerăm fața cea mai simplă: un triunghi echilateral. Putem forma un vîrf alăturînd trei, patru sau cinci triunghiuri din acestea. Dacă sînt mai multe decît cinci, unghiurile totalizează 360° sau mai mult, și deci nu pot forma un vîrf. Avem astfel numai trei căi posibile de a construi un solid convex regulat cu fețe triunghiulare. De asemenea, trei pătrate, și numai trei, vor forma un vîrf, indicînd posibilitatea unui solid regulat cu fețe pătrate. Același raționament ne dă o singură posibilitate cu trei pentagoane în fiecare vîrf. Nu putem trece dincolo de pentagon, căci dacă împreunăm trei hexagoane într-un vîrf, ele au 360°.

Această argumentare nu dovedește că pot fi construite cinci solide regulate, dar ea arată limpede că nu sînt posibile mai mult decît cinci. Argumente mai complicate stabilesc că există șase așa-numite politopuri, în spațiul cuadridimensional. Este curios că, în orice

spațiu cu mai mult de patru dimensiuni, nu există decît trei politopuri regulate: analogii tetraedrului, ai cubului și ai octaedrului.

De aici putem extrage o concluzie. Matematica limitează într-un sens cît se poate de real genul de structuri care pot exista în natură. De exemplu, este imposibil ca ființele din vreo altă galaxie să joace cu zaruri care să fie poliedre convexe regulate de o formă necunoscută nouă. Anumiți teologi au cutezat chiar să susțină că nici măcar Dumnezeu nu ar putea construi un al șaselea solid platonic în spațiul tridimensional. Tot astfel, geometria impune limite de netrecut varietăților de creștere a cristalelor. Într-o zi, s-ar putea chiar ca fizicienii să descopere limitări matematice ale numărului de particule fundamentale și ale numărului legilor de bază. Firește, nimeni nu are idee despre felul în care matematica ar putea, dacă acesta este cazul, să impună restricții naturii structurilor care pot fi denumite „vii". Se poate concepe, bunăoară, că proprietățile compușilor carbonului sînt absolut esențiale pentru viață. Oricum ar fi, astăzi cînd omenirea se străduiește să găsească viață pe alte planete, solidele platonice servesc ca un vechi avertisment, care ne arată că s-ar putea să fie mai puține lucruri pe Marte și pe Venus decît visează filozofia noastră.

RĂSPUNSURI

Rezistența totală a rețelei cubice este de 5/6 Ω. Dacă cele trei vîrfuri mai apropiate de A sînt scurtcircuitate împreună și se procedează la fel cu cele trei vîrfuri apropiate de B, nu va trece curent în cele două triunghiuri de scurtcircuite, deoarece fiecare conectează puncte echipotențiale. Se vede acum ușor că există trei rezistențe de cîte 1 Ω în paralel între A și triunghiul cel mai apropiat (rezistența 1/3 Ω), șase în paralel între triunghiuri (1/6 Ω) și trei în paralel între al doilea triunghi și B (1/3 Ω), ceea ce dă o rezistență totală de 5/6 Ω.

C.W. Trigg, discutînd problema rețelei cubice în numărul din noiembrie-decembrie 1960 al revistei „Mathematics Magazine", arată că poate fi găsită o soluție în cartea lui E.E. Brooks și A.W. Poyser, *Magnetism and Electricity*, 1920. Problema și metoda de rezolvare pot fi ușor extinse la rețele de forma celorlalte patru solide platonice.

Cele trei moduri de a numerota fețele unui octaedru, așa încît totalul din jurul fiecărui vîrf să fie 18, sînt: 6,7,2,3, în sensul mer-

sului acelor de ceasornic (sau contrar) în jurul unui vîrf. și 1,4,5,8, în jurul vîrfului opus (6 adiacent la 1, 7 la 4 etc.), 1,7,2,8, și 4,6,3, 5; și 4,7,2,5, și 6,1,8,3. În lucrarea lui W.W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, cap. 6, se dă o demonstrație simplă că octaedrul este singurul dintre cele cinci solide ale cărui fețe pot fi astfel numerotate, încît să avem o sumă constantă la fiecare vîrf.

Distanța cea mai scurtă pe care musca o poate parcurge pentru a acoperi toate muchiile unui icosaedru este de 35 de unități. Eliminînd cinci muchii ale solidului (de exemplu *FM*, *BE*, *JA*, *ID* și *HC*), ne rămîne o rețea în care avem numai două puncte, *G* și *K*, unde se întîlnește un număr impar de muchii. De aceea, musca poate să parcurgă pe această rețea pornind din *G* și mergînd spre *K*, fără să revină peste vreo muchie, o distanță de 25 de unități. Aceasta este cea mai lungă distanță pe care ea o poate străbate fără să dubleze vreo muchie. Acum fiecare muchie eliminată poate fi adăugată la acest drum, ori de cîte ori musca ajunge la ea, pur și simplu traversînd-o dus și întors. Cele cinci muchii înlăturate, care sînt parcurse fiecare de cîte două ori, adaugă zece unități la lungimea drumului, mărindu-i totalul la 35.

Mesajul din felicitare dat de litere este „Noel" (adică no „L" — fără „L").

Capitolul 2 TETRAFLEXAGOANE

Hexaflexagoanele sînt structuri amuzante cu șase fețe, din hîrtie, care pot fi „flexate" în așa fel încît să prezinte suprafețe diferite. Ele se construiesc prin împăturirea unei fîșii de hîrtie, așa cum se arată în Cartea întîi. Rudele apropiate ale hexaflexagoanelor sînt o bogată varietate de structuri cu patru laturi, care pot fi grupate, cu oarecare aproximație, sub termenul de tetraflexagoane.

După cum s-a văzut, hexaflexagoanele au fost inventate în 1939 de Arthur H. Stone, pe atunci absolvent în matematică la Universitatea Princeton, iar astăzi conferențiar de matematică la Universitatea din Manchester, Anglia. Proprietățile lor au fost cercetate sub toate aspectele; în adevăr, a fost dezvoltată o teorie matematică completă a hexaflexării. Despre tetraflexagoane se știe mult mai puțin. Stone și amicii săi (îndeosebi John W. Tukey, astăzi un topolog cunoscut) au consumat un timp considerabil, împăturind și analizînd aceste forme patrulatere, dar n-au reușit să dezvolte o teorie satisfăcătoare care să îmbrace toate variantele lor discordante. Totuși, mai multe specii de tetraflexagoane sînt foarte interesante din punct de vedere recreativ.

Să considerăm întîi cel mai simplu tetraflexagon, o structură cu trei fețe, care poate fi denumită tritetraflexagon. El se obține ușor din fîșia de hîrtie arătată în fig. 100 (100 *a* este fața benzii, 100 *b* spatele). Numerotați micile pătrate de pe fiecare parte a fîșiei așa cum se arată, îndoiți ambele capete spre interior (100 *c*) și reuniți două muchii cu o bucată de hîrtie de lipit transparentă (100 *d*). Fața *2* este acum la vedere; fața *1* este în spate. Pentru a flexa structura, îndoiți-o spre spate în lungul liniei verticale din mijlocul feței *2*. Fața *1* va ajunge acum în interiorul flexagonului, iar fața *3* apare la vedere.

Stone și prietenii săi nu au fost primii descoperitori ai acestei interesante structuri; ea este utilizată de secole ca balama cu dublă acțiune. Am pe masă două mici cadre care conțin fotografii. Cadrele

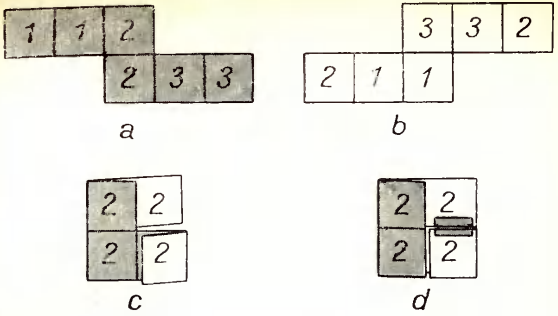


Fig. 100 Cum confecționăm un tritetraflexagon.

sînt legate prin două balamale tritetraflexagonale, care permit cadrelor să fie întoarse cu aceeași ușurință spre față și spre spate.

Aceeași structură este folosită în mai multe jucării pentru copii, dintre care cea mai cunoscută este un lanț din bucățele plate de lemn sau de plastic, legate între ele prin benzi încrucișate. Dacă jucăria este mînuită cum trebuie, unul dintre blocurile ei pare să cadă de-a lungul lanțului, de la partea de sus la cea de jos. În realitate, este o iluzie optică, creată prin flexarea una după alta a balamalelor tritetraflexagonale. Jucăria s-a bucurat de popularitate în S.U.A., în anii 1890, cînd era cunoscută sub numele de scara lui Jacob. Două modele actuale se vînd sub denumirile comerciale Klik-Klak Blox și Flip Flop Blocks.

Există cel puțin șase tipuri de tetraflexagoane cu patru fețe, denumite tetratetraflexagoane. O metodă bună de a confecționa o astfel de structură constă în a porni de la o bucată dreptunghiulară de carton subțire, pe care o împărțim în 12 pătrate. Numerotăm pătratele pe ambele fețe, așa cum se vede în fig. 101 *(a* și *b)*. Decupați dreptunghiul în lungul liniilor punctate. Începeți cum se arată în fig. 101 *a*, apoi îndoiți cele două pătrate din centru spre spate și la stînga. Îndoiți spre spate coloana din dreapta. Cartonul va arăta acum ca în fig. 101 *c*. Îndoiți din nou spre spate coloana din dreapta. Singurul pătrat care iese acum din format în stînga se îndoaie spre față și la dreapta. Astfel toate cele șase pătrate notate

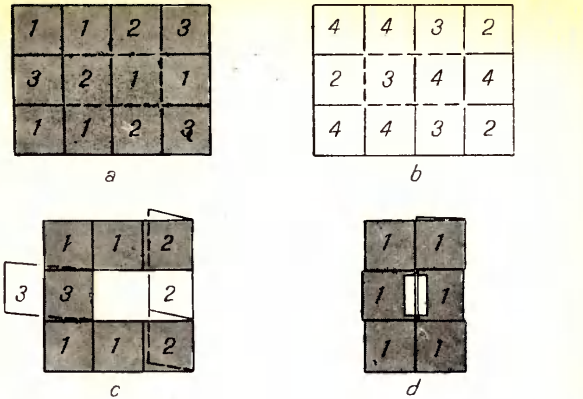


Fig. 101 Cum confecționăm un tetratetraflexagon.

cu *1* ajung în față. Fixați împreună muchiile celor două pătrate din mijloc cu o bucată de hîrtie transparentă, cum se vede în fig. 101 *d*.

Veți constata că este simplu să flexați astfel ca fețele *1*, *2*, și *3* să ajungă la vedere. Veți avea ceva mai mult de lucru pînă găsiți fața *4*. Firește, nu trebuie să rupeți cartonul. Tetraflexagoane de ordin mai înalt, de acest tip, dacă au un număr par de fețe, pot fi construite luînd ca model inițial dreptunghiuri asemănătoare. Tetraflexagoanele cu număr impar de fețe au nevoie de modele analoge cu cel folosit pentru tritetraflexagon. În adevăr, două linii de pătrate mici sînt suficiente pentru a confecționa tetraflexagoane de acest fel, dar dacă adăugăm una sau mai multe linii suplimentare (care nu modifică structura esențială), modelul devine mai ușor de mînuit.

Tetratetraflexagonul din fig. 101 a fost adesea folosit ca pliant publicitar, deoarece dificultatea de a găsi fața a patra face din el o jucărie amuzantă. Am văzut multe pliante din acestea, unele datînd din anii 1930. Unul avea o monedă de un penny, lipită de

fața ascunsă; obiectul jocului era de a găsi moneda. În 1946, Roger Montandon, de la The Montandon Magic Company, Tulsa, Oklahoma, a brevetat un pliant tetratetraflexagonal, numit *Cherchez la Femme*, jocul constînd în a găsi poza unei tinere femei. Magazinele de scamatorii și noutăți vînd, și ele, o veche jucărie pentru copii numită de obicei „portofelul magic". Plierea tritetraflexagonală a jucăriei permite efectuarea unor trucuri simple în care dispare o bancnotă de un dolar sau un alt obiect plat.

O altă variantă a tetraflexagonului, și anume una care are proprietatea neobișnuită de a flexa după două axe perpendiculare, poate fi confecționată, de asemenea, cu patru sau mai multe fețe. Construcția unui hexatetraflexagon de acest tip este redată în fig. 102. Începeți cu banda de formă pătrată din fig. 102 *a* (fața) și 102 *b* (spatele). Micile pătrate trebuie numerotate cum se vede în figură. Îndoiți în lungul fiecăreia dintre liniile interne din fig. 102 *a*, astfel încît fiecare linie să fie fundul unei văi, îndreptați din nou banda și împăturiți după cele patru linii marcate cu săgeți. Toate îndoirile se fac în conformitate cu felul în care liniile au fost îndoite la început. Banda arată acum ca în fig. 102 *c*. Îndoiți după cele trei linii marcate cu săgeți, ca să obțineți un flexagon pătrat. Rabateți capetele, astfel încît pătratele *2* să ajungă deasupra (102 *d*). Lipiți o hîrtie transparentă în stînga marginii de sus a pătratului, apoi îndoiți-o spre spate, ca să acopere muchia unui pătrat *1* de pe fața opusă.

Hexatetraflexagonul poate acum fi flexat în lungul axei verticale și a celei orizontale, ca să-și dezvăluie toate cele șase fețe. Benzi pătrate mai mari vor da flexagoane al căror număr de fețe crește din patru în patru: 10, 14, 18, 22 etc. Pentru tetraflexagoane de alte ordine, trebuie să recurgem la benzi de formă diferită.

În timp ce Stone lucra la forme de flexagoane din triunghiuri dreptunghice („pentru care, poate din caritate, nu am inventat un nume", arată el într-o scrisoare), el a dat peste un joc cu totul remarcabil: tetraflexatubul. El construise un flexagon plat, de formă pătrată, care, spre surprinderea sa, s-a deschis ca un tub. Continuînd să experimenteze, el a constatat că tubul poate fi complet întors cu fața dinăuntru în afară, printr-un șir complicat de flexări în lungul frontierelor triunghiurilor dreptunghice.

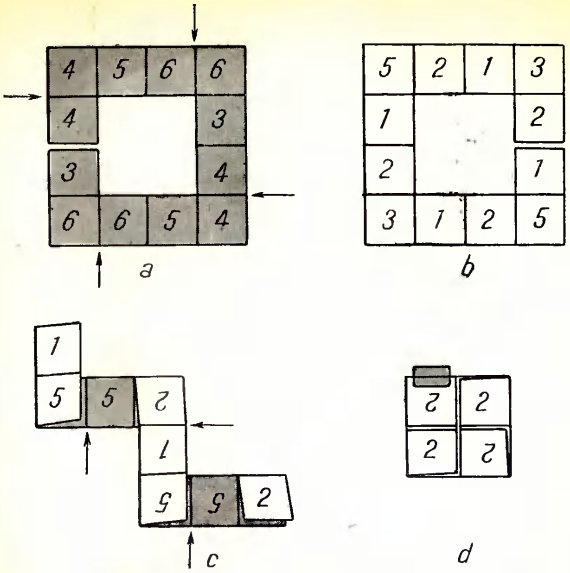


Fig. 102 Cum confecționăm un hexatetraflexagon.

Flexatubul se confecționează dintr-o bandă de patru pătrate (fig. 103), împărțite fiecare în patru triunghiuri dreptunghice. Îndoiți înainte și înapoi în lungul tuturor acestor linii, apoi lipiți marginile ca să obțineți un tub cubic. Jocul constă în a întoarce pe dos tubul flexînd numai în lungul liniilor îndoite. O variantă mai durabilă se poate face lipind 16 triunghiuri de carton sau de metal subțire pe o bandă de stofă și lăsînd între triunghiuri spații pentru flexare. Este recomandabil să coloraţi numai o față a triunghiurilor, astfel încît să puteți vedea în orice moment cît ați progresat în inversarea tubului.

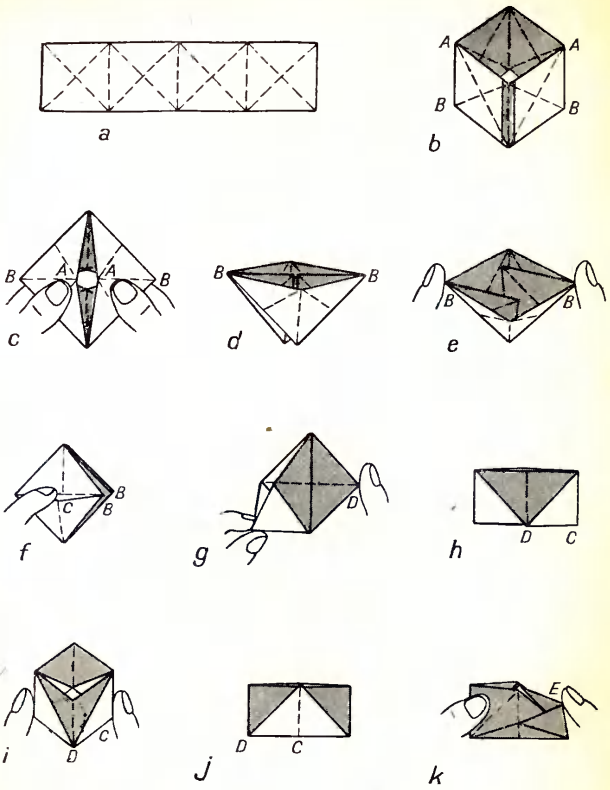


Fig. 103 Cum confecționăm și flexăm un flexatub.

O metodă de a rezolva această enigmă fascinantă este ilustrată de desenele 103 *b* — 103 *k*. Strîngeți împreună cele două vîrfuri *A* și striviți tubul, ca să obțineți flexagonul pătrat din 103 *c*. Îndoiți spre față după axa *BB*, ca să formați triunghiul din 103 *d*. Acum apropiați pînă la atingere cele două vîrfuri *B*, ca să obțineți un pătrat plat, dar asigurați-vă că cele două porțiuni din interior se așază în direcții opuse (103 *e*). Deschideți pătratul ca în 103 *f*, apoi trageți vîrful *C* în jos și spre stînga, pentru ca structura plată să arate ca în 103 *g*. Vîrful *D* se împinge acum spre stînga, înapoia structurii, creînd dreptunghiul plat din 103 *h*. Acest dreptunghi se deschide pentru a forma un tub cubic (103 *i*) a cărui înălțime este egală cu jumătate din înălțimea celui inițial.

Sînteți acum la jumătatea operațiilor; ați inversat exact jumătate de tub. Striviți tubul, ca să obțineți iarăși un dreptunghi (103 *j*), dar în sens opus celui arătat în 103 *h*. Pornind cum se arată în 103 *k*, operațiile precedente sînt acum așa-zicînd „desfăcute", efectuîndu-le în sens invers. Rezultatul: flexatubul inversat. Se cunosc cel puțin alte două metode cu totul diferite de a întoarce pe dos flexatubul, ambele la fel de ocolite și dificile ca și aceasta.

Recent, Stone a reușit să demonstreze că o bandă cilindrică de orice lărgime poate fi întoarsă cu fața interioară în afară printr-un număr finit de îndoiri în lungul unor linii drepte, însă metoda generală este mult prea complicată pentru a fi descrisă aici. Se pune întrebarea: „Este oare posibil să întoarcem o pungă de hîrtie (adică un tub dreptunghiular închis în partea de jos) cu partea interioară în afară, printr-un număr finit de îndoiri? Este o problemă nerezolvată. După toate aparențele, răspunsul este nu, indiferent de dimensiunile pungii, deși probabil ar fi extrem de greu să se găsească o demonstrație satisfăcătoare.

Capitolul 3

HENRY ERNEST DUDENEY CEL MAI MARE ENIGMIST AL ANGLIEI

Henry Ernest Dudeney a fost cel mai mare inventator de enigme și jocuri; el a fost, poate, cel mai mare enigmist care a trăit vreodată. Astăzi găsim cu greu vreo carte de jocuri și enigme care să nu conțină (adesea fără a-l cita) duzini de strălucite probleme de matematică, create de fertila imaginație a lui Dudeney.

S-a născut în 1857 în satul Mayfield din Anglia. Era deci cu 16 ani mai tînăr decît Sam Loyd, geniul american al jocurilor. Nu știu dacă cei doi s-au întîlnit vreodată, dar în ultimul deceniu al secolului trecut ei au colaborat la o serie de articole consacrate jocurilor și enigmelor pentru revista „Tit-Bits" din Anglia, iar mai tîrziu ei s-au înțeles să facă schimb de materiale pentru rubricile lor din reviste și ziare. Aceasta ar putea explica marea cantitate de dublări din scrierile publicate ale lui Loyd și ale lui Dudeney.

Dintre ei doi probabil că Dudeney a fost matematicianul cel mai bun. Loyd excela în a captiva interesul publicului cu jucării manufacturate și prin noutăți de publicitate. Nici una din creațiile lui Dudeney nu s-a bucurat de o atît de largă popularitate în lumea întreagă ca jocul „14—15" al lui Loyd sau paradoxul său „Desprinderea de Pămînt", în care dispărea un războinic chinez. Pe de altă parte opera lui Dudeney a fost mai interesantă din punct de vedere matematic (el a calificat o dată rebusul sau enigma cu imagini, din care Loyd a produs mii, drept o „imbecilitate puerilă", care nu-i poate interesa decît pe cei slabi de minte). La fel cu Loyd, ți plăcea să-și îmbrace problemele în anecdote amuzante. Se pare că, în această privință, era ajutat de soția sa, Alice, care a scris peste 30 de romane romanțioase, foarte citite pe vremea lor. Cele șase cărți de jocuri și enigme ale lui Dudeney (trei dintre ele sînt culegeri, reunite după moartea sa în 1931), rămîn neîntrecute în literatura genului.

Prima carte a lui Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, a apărut în 1907. Aceasta este redată sub forma unui șir de întrebări hazlii,

puse de același grup de pelerini ale căror povestiri sînt relatate de Chaucer. „Nu vreau să mă opresc pentru a explica modul curios în care au intrat în posesia mea, scrie Dudeney, ci... voi da imediat cititorilor mei ocazia de a le rezolva". Problema negustorului de mărunțișuri, care figurează în această carte, este cea mai cunoscută descoperire geometrică a lui Dudeney. Problema constă în a tăia un triunghi echilateral în patru bucăți, astfel încît să poată fi asamblate într-un pătrat.

Desenul din fig. 104, stînga sus, arată cum se fac secționările. Tăiați în două părți egale AB în punctul B și BC, în E. Prelungiți AE pînă în F, astfel încît EF să fie egal cu EB. Tăiați AF în două părți egale în punctul G, apoi luînd G ca centru, descrieți arcul AHF. Prelungiți EB pînă la H. Din E ca centru, descrieți arcul HJ. Faceți JK egal cu BE. Din D și din K coborîți perpendiculare pe EJ, ca să obțineți punctele L și M. Cele patru bucăți pot fi acum rearanjate ca să dea un pătrat perfect, cum se vede în desenul din dreapta sus. O trăsătură remarcabilă a acestei tăieri constă în faptul că, dacă piesele sînt articulate la trei vîrfuri, cum se arată în desenul de jos, ele formează un lanț care, încolăcit în sensul mersului acelor de ceasornic, reface triunghiul, iar în sens contrar, reface pătratul. Dudeney a executat figura sub forma unui model din mahon cu balamale de alamă, cu care a demonstrat problema la Royal Society de la Londra, în 1905.

Conform unei teoreme demonstrate pentru prima oară de marele matematician german David Hilbert, orice poligon poate fi transformat în orice alt poligon de arie egală, dacă îl decupăm într-un număr finit de bucăți. Demonstrația este lungă, dar nu prea dificilă. Ea se întemeiază pe două fapte: 1) orice poligon poate fi tăiat prin diagonalele sale într-un număr finit de triunghiuri și 2) orice triunghi poate fi tăiat într-un număr finit de părți care pot fi rearanjate astfel încît să formeze un dreptunghi cu o bază dată. Aceasta înseamnă că putem transforma orice poligon, de formă oricît de fantezistă, într-un dreptunghi cu o bază dată, pur și simplu desfăcîndu-l întîi în triunghiuri, transformînd triunghiurile în dreptunghiuri de bază dată și făcînd apoi o coloană de dreptunghiuri. Inversînd procedeul, putem apoi folosi această coloană ca să obținem orice alt poligon de arie egală cu a celui inițial.

În mod surprinzător, teorema analogă pentru poliedre, adică pentru corpuri mărginite de poligoane plane, nu mai este valabilă. Nu există o metodă generală pentru a secționa un poliedru prin tăieturi plane astfel încît să formeze un alt poliedru de volum egal,

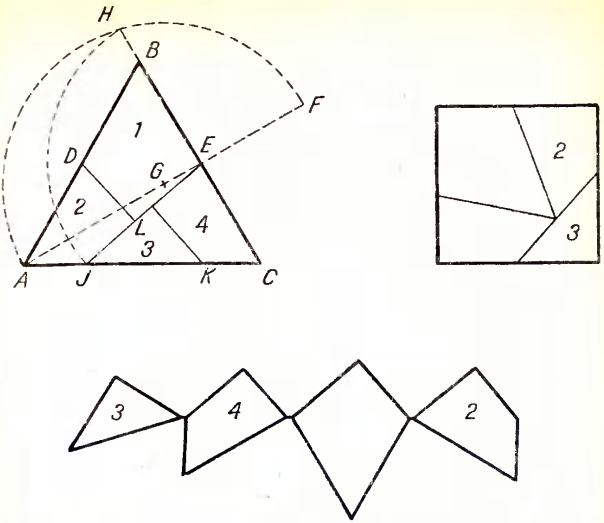


Fig. 104 Problema lui Dudeney: tăierea unui triunghi echilateral în patru bucăți care se îmbină într-un pătrat.

deși, firește, problema este realizabilă în anumite cazuri particulare. Speranța că se va găsi o metodă generală a fost spulberată în 1900, cînd a fost demonstrată imposibilitatea de a transforma o prismă într-un tetraedru regulat.

Deși procedeul lui Hilbert garantează transformarea unui poligon în altul printr-un număr finit de secționări, numărul de piese necesare poate fi foarte mare. Pentru a fi elegantă, o secționare trebuie să aibă nevoie de cel mai mic număr de tăieturi cu putință. Acesta este adesea foarte greu de determinat. Dudeney a înregistrat succese spectaculoase în această stranie artă geometrică, îmbunătățind adesea recorduri de mult stabilite. De exemplu, deși hexagonul regulat poate fi tăiat în numai cinci bucăți care dau un pătrat,

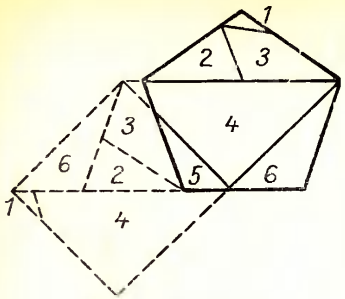


Fig. 105 Pentagonul reasamblat într-un pătrat.

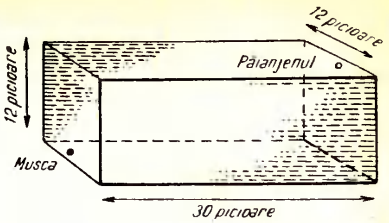
se considera, de mai mulți ani, că pentagonul regulat necesită cel puțin șapte bucăți. Dudeney a izbutit să reducă numărul la șase, recordul actual. Figura 105 arată cum poate fi transformat un pentagon într-un pătrat prin metoda lui Dudeney. Explicația modului în care Dudeney a ajuns la această metodă poate fi găsită în cartea sa *Amusements in Mathematics*, publicată în 1917.

Cea mai celebră enigmă a lui Dudeney, cu păianjenul și musca, este o problemă elementară dar frumoasă, referitoare la geodezice. Ea a apărut pentru prima dată într-un ziar englez, în 1903, dar nu a trezit un interes prea larg în rîndurile publicului decît după ce a prezentat-o din nou, peste doi ani, în „The Daily Mail" din Londra. O încăpere dreptunghiulară are dimensiunile date în fig. 106. Păianjenul se află pe linia mediană a unui perete lateral, la distanța de un picior* de tavan. Musca se află pe linia mediană a peretelui opus, la un picior înălțime deasupra pardoselii și este atît de paralizată de frică, încît nu se poate mișca. Care este cea mai scurtă distanță pe care trebuie s-o străbată păianjenul ca să ajungă la muscă?

Problema se rezolvă secționînd camera astfel, încît pereții și tavanul să poată fi desfășurați în același plan cu podeaua, după care se trage o linie dreaptă de la păianjen la muscă. Există însă mai multe căi în care încăperea poate fi rabătută pe un plan, și deci

* Unitate de lungime egală cu aproximativ 30,5 cm. — *N.R.*

Fig. 106 Problema păianjenului și a muștei.



determinarea drumului celui mai scurt nu este chiar atît de ușoară cum pare la început.

O problemă similară cu geodezice, dar mai puțin cunoscută, apărută în cartea lui Dudeney, *Modern Puzzles* (1926), are ca obiect cilindrul de sticlă din fig. 107. Acesta are înălțimea de 4 țoli și circumferința de 6 țoli. În interiorul lui, la distanța de un țol de marginea superioară, este o picătură de miere. În exterior, diametral opus, la înălțimea de un țol deasupra fundului, se află o muscă. Care este cel mai scurt drum pe care musca poate să ajungă la miere, și ce distanță exactă parcurge musca?

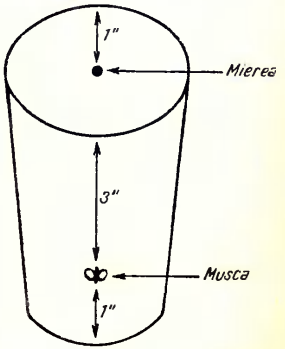


Fig. 107 Musca și mierea.

Este interesant de relevat că, deși puțin familiarizat cu topologia, care mai era pe atunci în fașă, Dudeney a folosit frecvent inteligente trucuri topologice pentru a rezolva diverse probleme de parcurs și de mișcare în sensuri opuse. El numea aceasta „metoda nasturilor și a șireturilor". Un exemplu tipic îl constituie vechea problemă de șah din fig. 108. Cum puteți face caii albi să-și schimbe locurile cu cei negri, printr-un număr minim de mutări? Înlocuim cele opt pătrate exterioare cu nasturi (*desenul din mijloc*) și tragem linii care să indice toate mișcările posibile ale calului. Dacă vom considera aceste segmente drept șireturi care leagă între ei nasturii, este limpede că putem desface șiretul ca să formeze un cerc (*desenul de jos*), fără a schimba structura topologică a elementelor și legăturile dintre ele. Vedem imediat că nu trebuie decît să mutăm caii în jurul cercului, în orice sens vrem, pînă cînd ei își schimbă locurile, ținînd minte mutările încît să le putem reproduce pe tabla pătrată inițială. Astfel, ceea ce pare la început o problemă grea devine ridicol de ușoară.

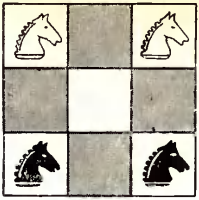
Dintre numeroasele probleme ale lui Dudeney, care recurg la teoria numerelor, cea mai grea este, poate, întrebarea pe care o pune medicul din *The Canterbury Puzzles*. Bunul doctor scoate la iveală două fiole sferice, una avînd circumferința exact de un picior*, iar cealaltă de două picioare. „Aș vrea să am, spune doctorul, măsurile exacte ale altor două fiole, de aceeași formă dar de altă mărime, care să conțină împreună exact atîta lichid ca acestea două".

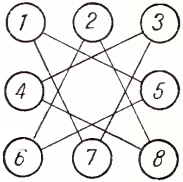
Deoarece volumele unor corpuri asemănătoare sînt în același raport ca și cuburile unor lungimi omologe, întrebarea se reduce la problema diofantică de a găsi două numere raționale, diferite de 1 și de 2, ale căror cuburi să aibă suma 9. Bineînțeles, ambele numere trebuie să fie fracționare. Soluția lui Dudeney este

$$\frac{415280564497}{348671682660} \text{ și } \frac{676702467503}{348671682660}.$$

Aceste fracții au numitorii mai scurți decît orice soluție publicată anterior. Ținînd seama că Dudeney lucra fără o mașină de calcul modernă, realizarea lui este de-a dreptul uimitoare.

* A se vedea nota din p. 186 — *N.R.*





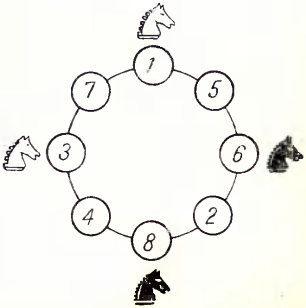


Fig. 108 Metoda „nasturilor şi a şireturilor" a lui Dudeney.

Cititorii cărora le place acest tip de probleme vor fi bucuroşi de sarcina mult mai simplă de a găsi două fracţii ale căror cuburi să aibă suma egală cu 6. O „demonstraţie" publicată de matematicianul francez din secolul al XIX-lea Adrien-Marie Legendre, că astfel de fracţii nu sînt posibile, a fost infirmată mai tîrziu, cînd Dudeney a descoperit o soluţie în care fracţiile nu au decît două cifre la numărător şi două la numitor.

ADAOS

Secţionarea triunghiului echilateral de către Dudeney pentru a forma un pătrat mi-a prilejuit primirea unui mare număr de scrisori interesante de la cititori. John S. Gaskin, din Londra, şi Arthur B. Niemoller, din Morristown, New Jersey, au descoperit în mod independent că metoda lui Dudeney poate fi aplicată, cu anumite modificări, unei vaste clase de triunghiuri neechilaterale. O doamnă din Brooklyn mi-a scris că fiul ei i-a construit un set de patru mesuţe ale căror tăblii pot fi împreunate ca să formeze fie un pătrat, fie un triunghi echilateral şi că aceste mesuţe s-au dovedit a fi o adevărată operă de artă. L. Vosburgh Lyons, din New York, a utilizat construcţia lui Dudeney pentru a secţiona planul într-un mozaic infinit de pătrate şi de triunghiuri echilaterale îmbinate.

Mai mulţi cititori, presupunînd că punctele J şi K (fig. 104) se află în imediata vecinătate a punctelor D şi E, au trimis demonstraţii potrivit cărora cele patru fragmente nu ar da un pătrat perfect. Însă construcţia lui Dudeney nu aşază J şi K în imediata apropiere a lui D şi E. O demonstraţie formală a corectitudinii secţionării se găseşte în articolul lui Chester W. Hawley, *O nouă notă despre secţionarea pătratului într-un triunghi echilateral*, în „The Mathematics Teacher", februarie, 1960.

O variantă remarcabilă a problemei lui Dudeney cu păianjenul şi musca se găseşte în Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations*, 1953, p. 17. Opt păianjeni pornesc dintr-un punct aflat la 80 de ţoli deasupra centrului unui perete lateral al camerei dreptunghiulare. Ei iau opt căi diferite pentru a ajunge la o muscă aflată

pe peretele opus, la 80 țoli dedesubtul centrului. Fiecare păianjen înaintează cu o viteză de 0,65 mile pe oră, iar după 625/11 s ei ajung simultan la muscă. Care sînt dimensiunile camerei?

RĂSPUNSURI

Drumul cel mai scurt pe care îl parcurge păianjenul pentru a ajunge la muscă este exact de 40 de picioare, cum se vede în desfășurarea din fig. 109. Cititorul va fi, poate, surprins că această geodezică face păianjenul să străbată cinci din cele șase fețe ale camerei.

Musca ajunge la miere parcurgînd drumul de 5 țoli desenat pe cilindrul desfășurat din fig. 110. Este drumul pe care l-ar urma un fascicul luminos imaginar, străbătînd dreptunghiul de la muscă spre miere și reflectîndu-se de latura superioară a dreptunghiului. Evident, aceasta este tot una cu lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic avînd catetele 3 și 4, cum se arată în figură.

Cele două fracții ale căror cuburi au suma egală cu 6 sînt 17/21 și 37/21.

Pentru răspunsul la problema cu păianjenii și musca, dată în Adaos, consultați lucrarea citată.

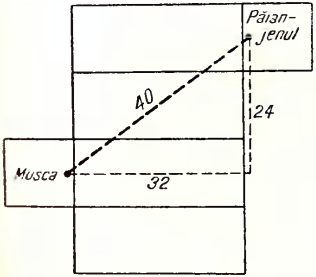


Fig. 109 Răspuns la problema păianjenului și a muștei.

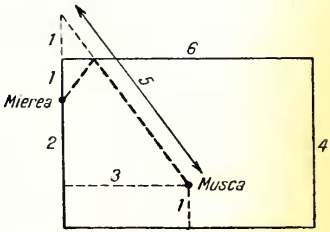


Fig. 110 Răspuns la problema muștei și a mierii.

Capitolul 4 RĂDĂCINI CIFRICE

Scrieți pe o hîrtie numărul dv. de telefon. Încurcați cum vreți ordinea cifrelor, pentru a forma un nou număr, apoi scădeți-l pe cel mai mic din cel mai mare. Adunați toate cifrele din răspuns. Acum puneți degetul peste steaua din cercul de simboluri misterioase (fig. 111) și numerotați micile cercuri cu simboluri, în sensul mersului acelor de ceasornic, denumind steaua 1, triunghiul 2 și așa mai departe, pînă cînd ajungeți la numărul care a constituit ultimul pas în operația de mai sus. Numărătoarea dv. se va termina neapărat ajungînd la spirală.

Funcționarea acestui mic truc nu este greu de înțeles și el ne oferă o introducere plăcută la noțiunea de congruență de numere, formulată de marele matematician german Carl Friedrich Gauss. Dacă două numere, împărțite printr-un număr dat k, dau același rest, ele se numesc congruente modulo k. Numărul k se numește modul. Astfel 16 și 23 dau restul 2 dacă le împărțim la 7, deci ele sînt congruente mod 7.

Întrucît 9 este cea mai mare cifră în sistemul de numerație zecimal, suma cifrelor unui număr va fi totdeauna congruentă mod 9 cu numărul inițial. Cifrele acestui al doilea număr pot fi adunate, ca să obținem un al treilea număr congruent cu celelalte două, iar dacă continuăm procesul pînă cînd nu mai rămîne decît o singură cifră aceasta va fi tocmai restul. De exemplu, 4 157 dă restul 8 la împărțirea prin 9. Cifrele lui au suma 17, care are și ea restul 8 mod 9. Iar suma cifrelor lui 17 este 8. Această din urmă cifră se numește rădăcina cifrică a numărului inițial. Ea este identică cu restul mod 9 al numărului, excepție făcînd numerele cu restul 0, în care caz rădăcina cifrică este 9 și nu 0.

Obținerea rădăcinii cifrice nu este decît vechiul procedeu al „eliminării lui 9". Înainte de dezvoltarea procedeelor de calcul, această tehnică era larg utilizată de contabili pentru verificarea rezultatelor. Unele calculatoare electronice actuale, cum ar fi

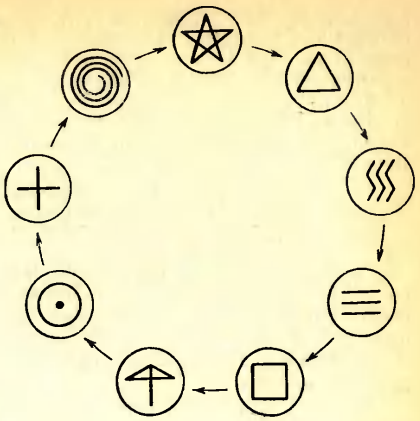


Fig 111 Simboluri pentru un truc cu un număr de telefon.

NORC al lui International Business Machine, de exemplu, utilizează această tehnică, în calitate de metodă încorporată constructiv, pentru autoverificarea exactității. Metoda se bazează pe faptul că dacă numerele întregi se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart exact, rezultatul va fi congruent mod 9 cu numărul obținut prin adunarea, scăderea, înmulțirea sau împărțirea rădăcinilor cifrice ale acelorași numere.

De exemplu, pentru a verifica repede o sumă în care intervin numere mari, obțineți rădăcinile cifrice ale numerelor, adunați-le, reduceți rezultatul la o rădăcină, iar apoi controlați dacă corespunde cu rădăcina cifrică a rezultatului de care vreți să vă asigurați. Dacă rădăcinile nu sînt identice, știți că undeva s-a strecurat o greșeală. Dacă rădăcinile concordă, mai poate exista totuși o greșeală, dar probabilitatea corectitudinii calculului este foarte mare.

Să vedem cum se aplică toate acestea la trucul cu numărul de telefon. Schimbarea ordinii cifrelor numărului nu-i poate schimba rădăcina cifrică, deci avem aici un caz în care un număr cu o anumită rădăcină cifrică este scăzut dintr-un număr mai mare cu ace-

eași rădăcină cifrică. Rezultatul va fi, cu certitudine, un număr divizibil prin 9. Pentru a vă da seama că este așa, imaginați-vă că numărul mai mare ar fi compus dintr-un anumit multiplu al lui 9, la care se adaugă o rădăcină cifrică (restul împărțirii numărului prin 9). Numărul mai mic constă dintr-un multiplu mai mic al lui 9, la care se adună *aceeași* rădăcină cifrică. Scăzînd numărul mai mic din numărul mai mare, rădăcinile cifrice dispar, și rămîne un multiplu al lui 9.

$$\frac{\begin{array}{l}(\text{Multiplu de } 9) + \text{o rădăcină cifrică} - \\ -(\text{Multiplu de } 9) + \text{aceeași rădăcină cifrică}\end{array}}{(\text{Multiplu de } 9) + 0}$$

Întrucît rezultatul este un multiplu de 9, el va avea rădăcina cifrică 9. Adunînd cifrele, vom obține un număr mai mic, avînd iarăși rădăcina cifrică 9, deci este sigur că rezultatul final va fi multiplu de 9. Cercul mistic are nouă simboluri. De aceea este cert că vom termina cu simbolul al nouălea, socotind de la primul pe care l-am marcat.

Cunoașterea rădăcinilor cifrice ne oferă adesea drumuri surprinzător de scurte în rezolvarea unor probleme care par neobișnuit de grele. De exemplu, să presupunem că vi se cere cel mai mic număr format din cifrele 1 și 0 care să fie divizibil prin 225. Rădăcina cifrică a lui 225 este 9, deci știți imediat că numărul cerut trebuie să aibă și el rădăcina cifrică 9. Cel mai mic număr format cu cifra 1 care va avea rădăcina cifrică 9 este, evident, 111 111 111. Adăugarea zerourilor în locuri semnificative va mări numărul, dar nu va modifica rădăcina. Problema constă în a mări cît mai puțin 111 111 111, astfel încît să devină divizibil prin 225. Deoarece 225 este multiplu de 25, numărul căutat trebuie și el să fie multiplu de 25. Toți multiplii lui 25 trebuie să aibă terminațiile 00, 25, 50 sau 75. Ultimele trei perechi nu pot fi folosite, deci adăugăm 00 la 111 111 111 și obținem răspunsul 11 111 111 100.

Jocurile matematice conduc și ele adesea la o analiză de rădăcini cifrice, cum ar fi jocul cu un singur zar. Se convine asupra unui număr arbitrar, de obicei mai mare decît 20, pentru a face jocul interesant. Primul jucător aruncă zarul și înregistrează numărul de sus. Al doilea jucător îi imprimă acum zarului un sfert de rotație în orice sens vrea și adună la numărul precedent pe cel care ajunge

acum deasupra. Jucătorii fac pe rînd sferturile de rotație, pînă cînd unul dintre ei cîștigă, realizînd numărul convenit sau forțîndu-l pe adversar să-l depășească. Jocul este greu de analizat din cauză că numerele de pe cele patru laturi care apar la fiecare întoarcere a zarului variază cu poziția acestuia. Ce strategie trebuie să adoptăm pentru a juca cît mai bine?

Numerele-cheie ale strategiei sînt cele care au aceleași rădăcini cifrice ca și numărul-limită. Dacă vă puteți asigura un număr din acest șir sau dacă puteți împiedica permanent pe adversar să-și asigure el un astfel de număr, aveți cîștigul asigurat. De exemplu, jocul se practică adesea pînă la numărul-limită 31, a cărui rădăcină cifrică este 4. Singura cale prin care primul jucător își poate impune cîștigul constă în a arunca un 4. După aceea el joacă în așa fel încît să se mențină în șirul 4—13—22—31, ori joacă în așa fel încît adversarul să nu poată intra în acest șir. Deoarece împiedicarea adversarului de a intra în șir este întrucîtva complicată, mă voi mărgini să spun că trebuie fie să jucăm cu 5 sub numărul-cheie, lăsînd fața cu 5 sus sau jos; sau cu 4 sau 3 sub cheie sau deasupra cheii, lăsînd fața cu 4 sus sau jos.

Există totdeauna o aruncare, cîteodată două sau trei, care vor garanta cîștigul primului jucător, cu excepția cazului cînd rădăcina cifrică a numărului-limită este 9. În aceste cazuri, al doilea jucător poate cîștiga totdeauna. Dacă numărul-limită este ales la întîmplare, șansele de a cîștiga îl favorizează mult pe al doilea jucător. Dacă primul jucător alege numărul-limită, care trebuie să fie rădăcina cifrică a numărului pe care-l alege, astfel ca șansa de a cîștiga să fie cît mai mare?

Un număr mare de trucuri cu cărți de joc se bazează pe proprietățile rădăcinilor cifrice. După părerea mea, cel mai bun este trucul care se vinde în magazine sub forma unui text dactilografiat în patru pagini, intitulat „Amintiți-vă viitorul". Inventatorul trucului este Steward James din Courtright, Ontario, un scamator care, probabil, a născocit mai multe trucuri cu cărți de joc, de o înaltă calitate matematică. Trucul este explicat aici cu încuviințarea lui James.

Dintr-un pachet de cărți de joc bine amestecat, scoateți nouă cărți cu valorile de la as la 9 și le așezați în ordine numerică începînd cu asul. Arătați celor care vă asistă ce ați făcut, apoi explicați

că veți tăia acest pachet, astfel încît nimeni nu va ști ce cărți ocupă cutare sau cutare poziții. Țineți în mînă pachetul cu fața în jos și prefaceți-vă că tăiați la întîmplare, dar tăiați în realitate în așa fel, încît trei cărți să ajungă din partea de jos a pachetului deasupra lui. Luînd de sus în jos, cărțile vor fi acum ordonate astfel: 7 — 8 — 9 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6.

Scoateți încet cîte o carte din partea de sus a pachetului mic, trecîndu-le în partea de sus a pachetului mare. În tot acest timp întrebați pe unul dintre cei de față ce carte vrea să-și aleagă. Bineînțeles, el trebuie să-și aleagă una din cele 9. Cînd spune „da" lăsați cartea aleasă deasupra celor rămase în pachetul mic și puneți-l deoparte.

Un spectator taie acum pachetul mare oriunde vrea și-l împarte în două coloane. Numărați cărțile dintr-o coloană, reduceți numărul la rădăcina sa cifrică, adunînd cifrele pînă ajungeți la o singură cifră. Faceți la fel cu a doua coloană. Acum adunați rădăcinile, și, dacă este cazul, reduceți suma la rădăcina ei cifrică. Cartea aleasă, de deasupra pachetului mic pus deoparte, este acum întoarsă cu fața în sus. Ea a prevăzut corect rezultatul manipulărilor de mai sus!

De ce? După ce cele nouă cărți au fost aranjate corect și tăiate, deasupra se va afla 7. Pachetul cel mare va consta din 43 de cărți, un număr a cărui rădăcină cifrică este 7. Dacă spectatorul nu alege șeptarul, cartea se adaugă la pachetul mare, unde vor fi acum 44 cărți. Pachetul cel mic are acum deasupra optarul, iar 8 este rădăcina cifrică a lui 44. Cu alte cuvinte, cartea aleasă de spectator trebuie neapărat să coincidă cu rădăcina cifrică a numărului de cărți din pachetul mare. Prin tăierea lui în două coloane și prin combinarea rădăcinilor fiecăreia, cum se arată mai sus, vom obține, natural, aceeași cifră ca la rădăcina cifrică a pachetului mare.

ADAOS

La începutul acestui capitol, afirmam că, deoarece sistemul nostru numeric are baza 10, rădăcina cifrică a oricărui număr este egală cu restul împărțirii acestui număr prin 9. Aceasta nu este greu de dovedit și poate că pe unii cititori îi va interesa o expunere informativă a demonstrației.

Să considerăm un număr de patru cifre, să zicem 4135. Acesta se poate scrie ca o sumă de puteri ale lui 10:

$$(4 \times 1000) + (1 \times 100) + (3 \times 10) + (5 \times 1)$$

Dacă scădem 1 din fiecare putere a lui 10, putem scrie:

$$(4 \times 999) + (1 \times 99) + (3 \times 9) + (5 \times 0) + 4 + 1 + 3 + 5$$

Expresiile din paranteze sînt, toate, multipli de 9. După ce le eliminăm ne rămîne $4 + 1 + 3 + 5$, cifrele numărului inițial.

În general un număr scris cu cifrele *abcd* poate fi reprezentat astfel:

$$(a \times 999) + (b \times 99) + (c \times 9) + (d \times 0) + a + b + c + d.$$

De aceea, $a + b + c + d$ trebuie să fie restul, după ce am eliminat multiplii lui 9. Firește, acest rest poate fi un număr de mai multe cifre. Dacă este așa, același procedeu va arăta că suma cifrelor *sale* va da un alt rest, după ce am eliminat alți multipli ai lui 9, și putem continua pînă ajungem la o singură cifră, rădăcina cifrică. Acest procedeu poate fi aplicat oricărui număr, indiferent cît de mare este acesta. De aceea, rădăcina cifrică este numărul care rămîne după ce am eliminat numărul maxim de 9, adică după ce numărul a fost împărțit la 9.

Rădăcinile cifrice sînt adesea utile pentru a verifica dacă un număr foarte mare este sau nu un pătrat sau un cub perfect. Toate pătratele au rădăcinile cifrice 1, 4, 7 sau 9, iar ultima cifră nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. Un cub se poate termina cu orice cifră, însă rădăcina sa cifrică trebuie să fie 1, 8 sau 9. Cel mai curios este că un număr par perfect (și pînă acum nu s-a găsit un număr impar perfect) trebuie să aibă ultima cifră 6 sau 8 și — cu excepția lui 6, cel mai mic număr perfect — rădăcina cifrică 1.

RĂSPUNSURI

În jocul cu un singur zar, dacă primul jucător alege numărul-limită, cea mai bună alegere este un număr cu rădăcina cifrică 7. Tabelul din fig. 112 arată prima aruncare cîștigătoare pentru fiecare dintre cele nouă rădăcini cifrice posibile ale numărului-limită.

RĂDĂCINA CIFRICĂ A NUMĂRULUI-LIMITĂ	PRIMELE ARUNCĂRI CÎȘTIGĂTOARE ALE ZARULUI
1	1, 5
2	2, 3
3	3, 4
4	4
5	5
6	3, 6
7	2, 3, 4
8	4
9	NICI UNA

Fig. 112

Șapte are trei aruncări prime cîștigătoare, mai multe decît orice altă aruncare cifrică. Aceasta dă primului jucător o șansă de 1/2 că va obține un număr care să ducă la un cîștig sigur, dacă va juca în continuare corect.

1. BOLȚURILE ÎMBINATE

Două bolțuri identice sînt puse alături astfel încît filetele lor să se îmbine (fig. 113). Dacă mișcați bolțurile unul în jurul celuilalt, ca și cum v-ați învîrti degetele mari de la mînă, ținînd fiecare bolț bine de capăt, astfel încît să nu se rotească și învîrtindu-le în sensul arătat, care va fi situația capetelor: ele (a) se vor mișca spre interior, (b) spre exterior sau (c) vor rămîne la aceeași distanță unul de celălalt? Problema trebuie rezolvată fără a recurge la o experimentare.

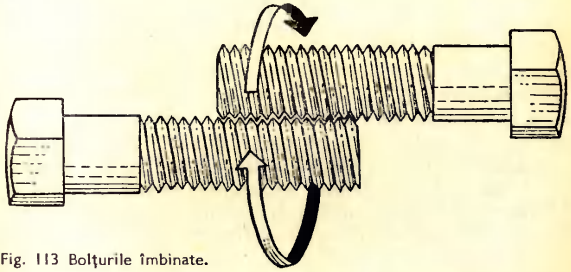


Fig. 113 Bolțurile îmbinate.

2. ZBORUL ÎN JURUL PĂMÎNTULUI

Un grup de avioane are baza pe o mică insulă. Rezervorul de carburanți al fiecărui avion are o capacitate suficientă pentru o jumătate de ocol al Pămîntului. Orice cantitate de carburant poate fi transferată din rezervorul unui avion în rezervorul altuia, în timpul

zborului. Unica sursă de carburant se află pe insulă, iar în problemă se presupune că nu se pierde timp cu aprovizionarea nici în aer, nici la sol.

Care este numărul minim de avioane care vor asigura zborul unui avion în jurul Pămîntului, după un cerc mare, presupunînd că avioanele au aceeaşi viteză constantă şi acelaşi consum de carburanţi, precum şi că toate avioanele revin în condiţii bune la baza de pe insulă?

3. CERCUL ŞI TABLA DE ŞAH

O tablă de şah are pătrăţelele cu latura de 2 ţoli. Care este raza celui mai mare cerc care poate fi trasat pe tablă, astfel încît circumferinţa lui să treacă numai prin pătrăţele negre?

4. DOPUL DE PLUTĂ

Numeroase cărţi mai vechi de jocuri matematice explică în ce fel poate fi cioplit un dop ca să intre uşor într-o gaură pătrată, circulară şi triunghiulară (fig. 114). O problemă interesantă constă în a afla volumul dopului. Să presupunem că el are baza circulară cu raza de o unitate, înălţimea de două unităţi şi o muchie dreaptă în partea de sus, de două unităţi, care este exact deasupra unui diametru al bazei şi paralelă cu el. Suprafaţa este în aşa fel, încît toate secţiunile verticale perpendiculare pe muchia de sus sînt triunghiuri.

Putem concepe suprafaţa şi ca fiind generată de o linie dreaptă care leagă muchia ascuţită cu muchia circulară şi care se mişcă în aşa fel, încît să rămînă tot timpul paralelă cu un plan perpendicular pe muchia ascuţită. Volumul dopului poate fi determinat, firește, prin calcul, dar există o cale simplă de a-l afla cu ceva mai multă informaţie decît cunoaşterea că volumul unui cilindru circular drept este egal cu aria bazei înmulţită cu înălţimea.

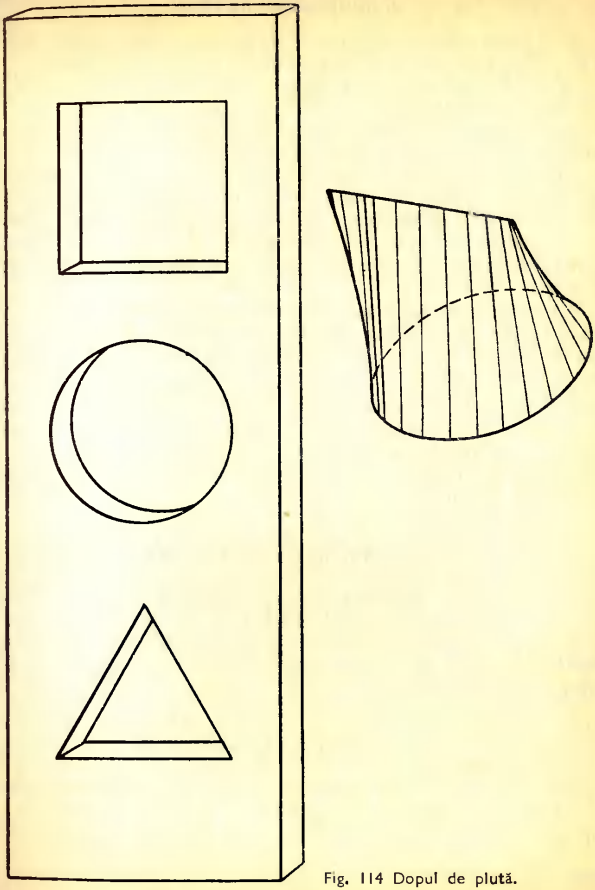


Fig. 114 Dopul de plută.

5. NUMĂRUL CU REPETIȚIE

Un truc de societate destul de puțin obișnuit se realizează astfel. Cereți unei persoane *A* să scrie un număr de trei cifre și să repete apoi cifrele în aceeași ordine, ca să obțină un număr de șase cifre (de pildă, 394 394). Stînd întors cu spatele, așa încît să nu puteți vedea numărul, cereți lui *A* să treacă foaia de hîrtie unei alte persoane *B*, care să împartă numărul la 7.

„Nu te preocupa de rest, căci nu va fi", îi spuneți. *B* este surprins să descopere că aveți dreptate (de exemplu, 394 394 împărțit la 7 dă 56 342). Fără să vă spună rezultatul, el îl transmite spectatorului *C*, căruia îi spuneți să-l împartă la 11. Anunțați iarăși că nu va fi rest, și veți avea din nou dreptate (56 342 împărțit la 11 dă 5 122).

Stînd mereu întors cu spatele și necunoscînd nici una dintre cifrele obținute prin aceste calcule, îndemnați pe un al patrulea, *D*, să împartă ultimul rezultat la 13. Împărțirea se face iarăși exact (5 122 împărțit la 13 dă 394). Acest ultim rezultat se scrie pe o bucată de hîrtie, care vi se înmînează împăturită. Fără a o desface, i-o treceți spectatorului *A* spunîndu-i: „Desfă și vei găsi numărul de trei cifre ales la început".

Demonstrați că trucul nu poate da greș, oricare ar fi cifrele alese de primul spectator.

6. RACHETELE CARE SE CIOCNESC

Două rachete se îndreaptă una spre cealaltă, prima cu 9 000 de mile pe oră, iar a doua cu 21 000 de mile pe oră. Ele decolează din două puncte situate la o distanță de 1 317 mile. Fără a folosi hîrtia și creionul, calculați distanța dintre ele cu un minut înainte de ciocnire.

7. MONEDELE ALUNECĂTOARE

Șase monede mici sînt așezate pe o suprafață plană, așa cum se arată în fig. 115. Problema constă în a le trece în formația redată în partea de jos a figurii, printr-un număr cît mai mic de mutări.

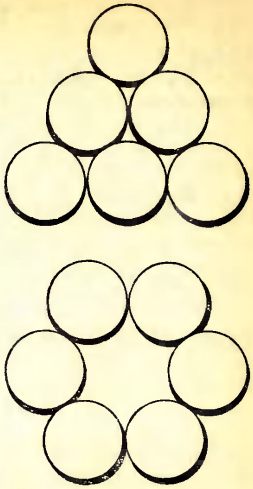


Fig. 115 Monedele alunecătoare.

Fiecare mutare constă în a mișca o monedă, fără a le deranja pe celelalte, dîndu-i o nouă poziție în care este tangentă la alte două monede. Monedele trebuie să rămînă tot timpul pe suprafața plană.

8. STRÎNGERI DE MÎNĂ ȘI REȚELE

Demonstrați că, la o recentă conferință de biofizică, numărul de savanți prezenți, care au schimbat un număr impar de strîngeri de mînă, este par. Aceeași problemă poate fi exprimată grafic în felul următor. Desenați pe o foaie de hîrtie oricîte puncte (biofizicieni) doriți. Desenați oricîte segmente de dreaptă (strîngeri de mînă) doriți de la un punct la altul. Un punct poate „să schimbe o strîngere de mînă" de cîte ori vreți sau de loc. Demonstrați că numărul de puncte cu un număr impar de segmente de legătură este par.

9. DUELUL TRIUNGHIULAR

Smith, Brown şi Joncs se înţeleg să se bată în duel cu pistolul, în următoarele condiţii neobişnuite. După ce trag la sorţi cui îi revine primul, al doilea şi al treilea foc, ei îşi ocupă locurile în colţurile unui teren în formă de triunghi echilateral. Ei au convenit să tragă cîte un singur foc o dată, rînd pe rînd, şi să continue în aceeaşi ordine ciclică, pînă cînd doi dintre ei vor fi morţi. La fiecare rundă, omul care trage are voie să ţintească oriunde îi place. Toţi trei combatanţii ştiu că Smith îşi nimereşte totdeauna ţinta, Brown în proporţie de 80%, iar Jones de 50%.

Admiţînd că toţi trei adoptă cea mai bună strategie şi că nici unul nu este ucis de un glonte rătăcit, care nu-i era destinat, cine are cele mai mari şanse de a supravieţui? O întrebare mai grea: care sînt probabilităţile de supravieţuire ale celor trei?

RĂSPUNSURI

1. Capetele bolţurilor îmbinate nici nu se apropie, nici nu se depărtează. Situaţia este comparabilă cu cea a unui om care urcă o scară rulantă cu aceeaşi viteză cu care scara se mişcă în jos. (Îi sînt îndatorat lui Theodore A. Kalin pentru că mi-a atras atenţia asupra acestei probleme.)

2. Trei avioane sînt suficiente pentru a asigura zborul unui avion în jurul Pămîntului. Există mai multe căi prin care se poate realiza aceasta, însă următoarea pare să fie cea mai eficace. Ea utilizează numai cinci rezervoare de carburant, permite piloţilor a două avioane să bea o ceaşcă de cafea şi să mănînce un sandvici, înainte de a se reaproviziona la bază, iar metoda prezintă o simetrie agreabilă.

Avioanele A, B şi C decolează împreună. După ce au parcurs 1/8 din distanţă, C transferă 1/4 de rezervor lui A şi 1/4 lui B. Astfel, lui C îi rămîne 1/4 de rezervor, tocmai suficient ca să se întoarcă acasă.

Avioanele A şi B mai parcurg o optime din drum, după care B îi transmite lui A 1/4 de rezervor. B are acum 1/2 de rezervor,

ceea ce este suficient ca să se întoarcă la bază, unde ajunge cu rezervorul gol.

Avionul *A*, cu rezervorul plin, continuă pînă cînd își epuizează carburantul la 1/4 din drumul spre bază. Aici îl întîlnește *C*, care a fost reaprovizionat la bază. *C* îi transmite lui *A* 1/4 de rezervor și ambele aparate se îndreaptă spre casă.

Cele două avioane consumă carburantul pînă la 1/8 din distanța pînă la bază, unde le întîlnește avionul *B*, reaprovizionat. *B* transmite cîte 1/4 de rezervor fiecăruia dintre celelalte două avioane. Acum cele trei avioane au exact carburantul care le trebuie ca să ajungă cu rezervoarele goale la bază.

Ansamblul manevrei poate fi reprezentat grafic cum se vede în fig. 116, unde distanța este trecută pe axa orizontală, iar timpul pe cea verticală. Bineînțeles marginile din stînga și din dreapta ale graficului trebuie considerate reunite.

3. Dacă așezați vîrful compasului în centrul unui pătrățel negru dintr-o tablă de șah în care pătrățelele au latura de doi țoli și întindeți picioarele compasului la o distanță egală cu rădăcina pătrată a 10 țoli, creionul va trasa cel mai mare cerc posibil, care trece numai prin pătrate negre.

4. Orice secțiune longitudinală prin dopul de plută, făcută sub un unghi drept cu muchia de sus și perpendicular pe bază, va fi

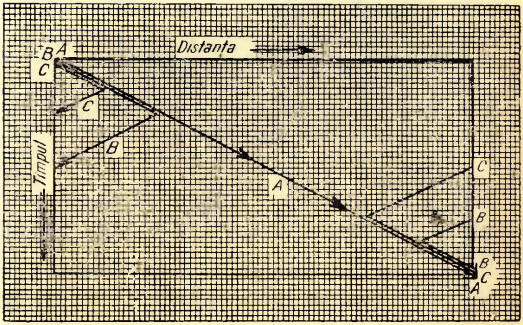


Fig. 116 Zborul în jurul Pămîntului.

un triunghi. Dacă dopul ar fi un cilindru de aceeași înălțime, secțiunile corespunzătoare ar fi dreptunghiuri. Fiecare secțiune triunghiulară are, evident, 1/2 din aria secțiunii dreptunghiulare corespunzătoare. Dat fiind că toate secțiunile triunghiulare se combină pentru a forma cilindrul, dopul trebuie să aibă 1/2 din volumul cilindrului. Volumul cilindrului este 2π, deci răspunsul nostru este simplu: π. (Această soluție este dată în articolul *Nu calculați, vă rog*, de J.H. Butchart și Leo Moser, în „Scripta Mathematica", septembrie-decembrie 1952.)

În realitate, dopul poate avea o infinitate de forme și să se potrivească totuși în cele trei găuri. Forma descrisă în problemă are volumul minim al unui solid convex care se va potrivi în găuri. Volumul maxim se obține prin procedeul simplu de a secționa cilindrul cu două plane, așa cum se vede în fig. 117. Aceasta este forma dată în cele mai multe cărți de jocuri matematice care cuprind problema dopului. Volumul lui este egal cu $2\pi - 8/3$.

5. A scrie de două ori un număr de trei cifre, este totuna cu a-l înmulți cu 1 001. Acest număr are factorii primi 7, 11 și 13, deci a scrie numărul ales de două ori este echivalent cu a-l înmulți cu 7, 11 și 13. Natural, cînd produsul este împărțit consecutiv prin aceleași trei numere, rezultatul final va fi numărul de la început. (Această problemă este dată de I. Perelman, în cartea sa *Jivaia matematika**, Moskva, 1957.)

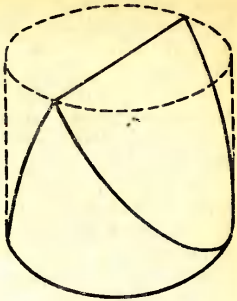
6. Cele două rachete se îndreaptă una spre cealaltă cu viteza rezultantă de 30 000 de mile pe oră sau 500 de mile pe minut. Derulînd filmul invers în timp, vedem că, la un minut înainte de ciocnire, rachetele vor trebui să fie la o distanță de 500 de mile.

7. Numerotați moneda din vîrful piramidei cu 1, pe cele din linia următoare cu 2 și 3, iar cele din linia de bază cu 4, 5 și 6. Următoarele patru mutări sînt tipice pentru mai multe soluții posibile: mutați pe 1, încît să atingă 2 și 4, mutați pe 4 încît să atingă 5 și 6, mutați pe 5 încît să atingă 1 și 2 jos, mutați 1 încît să atingă 4 și 5.

8. Întrucît la orice strîngere de mînă participă doi oameni, totalul pentru fiecare participant la conferință va fi divizibil prin 2,

* Matematica trăită. — *N.T.*

Fig. 117 Cioplirea dopului.



deci par. Totalul pentru participanții care au schimbat un număr impar de strîngeri de mînă este, natural, de asemenea par. Dacă scădem acest total par din totalul par al întregii conferințe obținem un total par pentru cei care au schimbat un număr impar de strîngeri de mînă. Numai un număr par de numere impare va da un număr par, deci tragem concluzia că un număr par de oameni a schimbat un număr impar de strîngeri de mînă.

Există și alte metode pentru a demonstra teorema. Una dintre cele mai bune mi-a fost trimisă de Gerald K. Schoenfeld, un medic din marina militară a S.U.A. La începutul conferinței, înainte de a se fi produs vreo strîngere de mînă, numărul de persoane care au dat mîna de un număr impar de ori va fi 0. Prima strîngere de mînă dă două „persoane impare". De acum înainte, strîngerile de mînă sînt de trei tipuri: între două persoane pare, între două persoane impare și între o persoană impară și una pară. Orice strîngere de mînă par — par micșorează cu 2 numărul de persoane impare. Orice strîngere de mînă impar — par schimbă o persoană pară într-una impară și o persoană impară într-una pară, lăsînd numărul de persoane impare neschimbat. De aceea, nu există nici o posibilitate ca numărul par de persoane impare să-și modifice paritatea; el trebuie să rămînă mereu par.

Ambele demonstrații se aplică unui graf de puncte în care se duc segmente de dreaptă pentru a reuni perechi de puncte.

Segmentele formează o rețea în care numărul de puncte care marchează întîlnirea unui număr impar de segmente este par. Vom reîntîlni această teoremă în cap. 7, în legătură cu trasarea unor rețele.

9. În duelul triunghiular cu pistolul, Jones, cel mai prost țintaș, are șansa cea mai mare, de a supraviețui. Smith, care nu-și greșește niciodată ținta, are a doua șansă. Întrucît cei doi adversari ai lui Jones vor ținti unul spre celălalt atunci cînd le va veni rîndul, strategia cea mai bună a lui Jones este de a trage în aer pînă cînd unul dintre adversari cade mort. El va avea atunci primul foc împotriva supraviețuitorului, ceea ce îi conferă un avantaj important.

Șansele de supraviețuire ale lui Smith sînt cel mai ușor de determinat. Există o șansă de 1/2 că el va avea primul foc în duelul cu Brown, în care caz îl va omorî. Există o șansă de 1/2 că Brown va trage primul, și deoarece precizia lui este de 4/5, Smith are șansa de a supraviețui egală cu 1/5. Astfel, șansa de supraviețuire a lui Smith față de Brown este de 1/2, la care se adună $1/2 \times 1/5 = 3/5$. Jones, care nimerește un foc din două, trage acum asupra lui Smith. Dacă ratează, Smith îl ucide, deci șansa lui Smith de a-i supraviețui lui Jones este de 1/2. Șansa de supraviețuire totală a lui Smith este deci $3/5 \times 1/2 = 3/10$.

Cazul lui Brown este mai complicat, deoarece intrăm într-un șir infinit de posibilități. Șansa lui de a-i supraviețui lui Smith este de 2/5 (am văzut mai sus că șansa lui Smith față de Brown este de 3/5, și deoarece unul dintre cei doi trebuie să supraviețuiască, scădem 3/5 din 1 pentru a obține șansa lui Brown de a-i supraviețui lui Smith). Brown trebuie acum să facă față loviturii lui Jones. Există o șansă de 1/2 ca Jones să rateze, în care caz Brown are o șansă de 4/5 să-l omoare pe Jones. De aici încolo, șansa lui de a-l ucide pe Jones este $1/2 \times 4/5 = 4/10$. Dar există o șansă de 1/5 ca Brown să rateze, dîndu-i lui Jones prilejul de a mai trage o dată. Șansa de supraviețuire a lui Brown este de 1/2; apoi el are șansa de 4/5 să-l ucidă pe Jones, deci șansa lui de a supraviețui la a doua rundă este $1/2 \times 1/5 \times 1/2 \times 4/5 = 4/100$.

Dacă Brown dă greș din nou, șansa lui de a-l ucide pe Jones în runda a treia va fi de 4/1 000; dacă ratează din nou, șansa în runda

a patra va fi de 4/10 000 etc. Şansa de supravieţuire totală a lui Brown împotriva lui Jones este deci suma seriei infinite:

$$\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1\,000} + \frac{4}{10\,000} \cdots$$

Aceasta se poate scrie sub forma zecimalei repetate 0,444444,... care este dezvoltarea în fracţie zecimală a lui 4/9.

După cum am văzut, Brown avea şansa 2/5 de a-i supravieţui lui Smith; vedem acum că are şansa de 4/9 împotriva lui Jones. Şansa lui de supravieţuire totală este deci $2/5 \times 4/9 = 8/45$.

Şansa de supravieţuire a lui Jones poate fi determinată similar, dar, bineînţeles, o putem obţine imediat scăzînd şansa lui Smith, 3/10, şi şansa lui Brown 8/45 din 1. Aceasta dă 47/90 ca şansă totală a lui Jones.

Întregul duel poate fi reprezentat grafic într-un mod convenabil cu ajutorul diagramei-arbore din fig. 118. Ea începe numai cu două ramuri, deoarece dacă lui Jones îi revine primul foc, rămîn numai două posibilităţi egale: primul foc, cu intenţia de a ucide, este tras de Smith sau de Brown. O ramură a arborelui continuă la infinit. Şansa de supravieţuire totală a unui individ se calculează astfel:

1. Marcaţi toate capetele ramurilor în care o persoană este singurul supravieţuitor.

2. Trasaţi înapoi spre baza arborelui fiecare capăt, înmulţind probabilităţile fiecărui segment, pe măsură ce-l parcurgeţi. Produsul va fi probabilitatea evenimentului de la extremitatea ramurii.

3. Adunaţi toate probabilităţile evenimentelor din punctele terminale marcate. Suma va fi probabilitatea de supravieţuire totală a persoanei respective.

În calculul şanselor lui Brown şi Jones, intervin o infinitate de puncte terminale, dar nu este greu să vedem din diagramă cum trebuie formulată seria infinită care intervine în fiecare caz.

Cînd am publicat răspunsul la această problemă, am adăugat că există poate aici o morală pentru politica internaţională. Aceasta a prilejuit următorul comentariu din partea lui Lee Kean, din Dayton, Ohio:

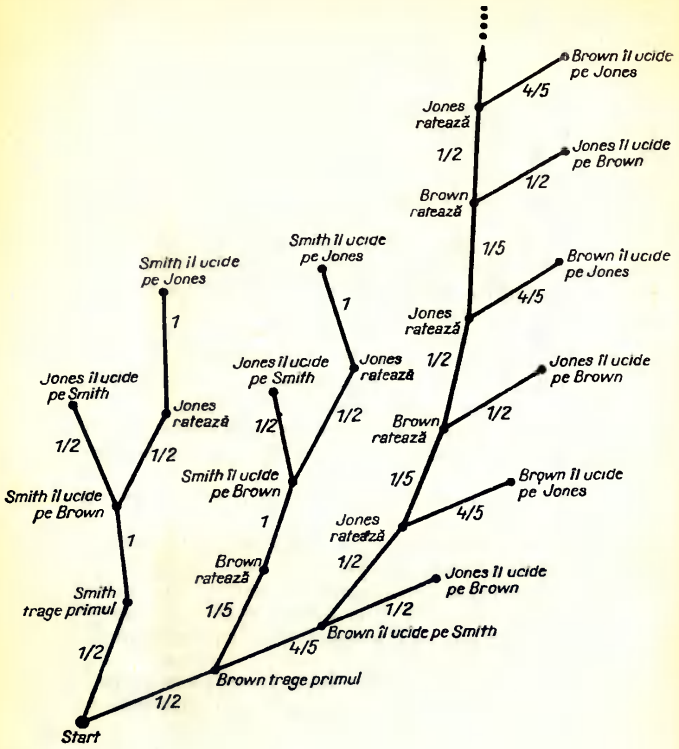


Fig. 118 Diagramă-arbore pentru problema duelului cu pistolul.

Domnilor,

Nu trebuie să ne așteptăm ca națiunile să se comporte în politica internațională atît de asemănător cu indivizii. Jones, cel cu șansa de 50%, contrar intereselor sale, va trage, dacă va putea, împotriva adversarului pe care-l crede cel mai periculos. Dar și așa, el are cea mai mare șansă de a supraviețui, anume 44,722%. Brown și Smith vor avea șansele inversate. Șansele de 80 și 20 ale lui Brown reprezintă 31,111%, iar focul sigur al lui Smith vine la sfîrșit cu 24,167%. Poate că morala pentru politica internațională este chiar mai evidentă aici.

Această problemă, în diverse forme, apare în mai multe cărți de amuzamente matematice. Cea mai veche referire pe care o cunosc este la Hubert Phillip, *Question Time*, 1938, problema 223. O variantă diferită a problemei se găsește în Clark Kinnaird, *Encyclopedia of Puzzles and Pastimes*, 1946, însă cu un rezultat incorect. Probabilități corecte pentru varianta lui Kinnaird sînt date în „The American Mathematical Monthly", decembrie 1948, p. 640.

CUBUL SOMA

„... nici un pic de timp, nici un răgaz... nici o clipă pentru a sta jos și a gîndi — iar dacă vreodată, prin nu se știe ce ghinion, apare o astfel de fisură a timpului în substanța solidă a distracțiilor lor, ei au totdeauna soma, delicioasa soma...“

— Aldous Huxley, *Brave New World*

Jocul chinezesc denumit tangram, despre care se crede că e vechi de mii de ani, folosește un pătrat dintr-un material subțire, secționat în șapte bucăți (vezi Cartea a doua, cap. 18). Jocul constă în a reașeza bucățile, pentru a forma alte figuri. Din timp în timp, s-au depus eforturi pentru a inventa un analog tridimensional. După părerea mea, nici unul nu a fost atît de reușit, cum este cubul *soma*, inventat de Piet Hein, scriitorul danez ale cărui jocuri matematice, *hex* și *tac tix*, sînt analizate în Cartea întîi. (În Danemarca, Piet Hein este mai binecunoscut pentru cărțile sale de epigrame, publicate sub pseudonimul Kumbel.)

Piet Hein a conceput cubul soma în timpul unei conferințe de fizică cuantică a lui Werner Heisenberg. În timp ce remarcabilul fizician german vorbea despre un spațiu secționat în cuburi, imaginația suplă a lui Piet Hein a întrezărit din zbor următoarea teoremă geometrică curioasă. Dacă luați toate formele neregulate care se pot obține combinînd cel mult patru cuburi, toate de aceeași mărime și alăturate cu cîte o față, aceste forme pot fi împreunate pentru a da un cub mai mare.

Să lămurim chestiunea mai bine. Cea mai simplă formă neregulată — „neregulată“ în sensul că are o concavitate sau un colț — se obține alăturînd trei cuburi, cum se vede în fig. 119, *1*. Este singura formă de acest fel, posibilă cu trei cuburi. (Natural, cu un cub

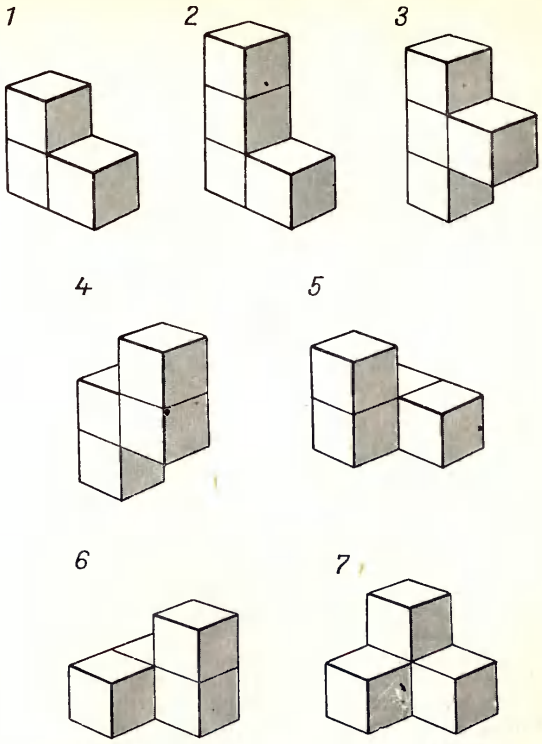


Fig 119 Cele şapte figuri soma.

sau cu două nu putem realiza nici o formă neregulată.) Trecînd la patru cuburi, constatăm că există şase căi diferite pentru a obţine forme neregulate prin alipirea feţelor cuburilor. Sînt formele *2*

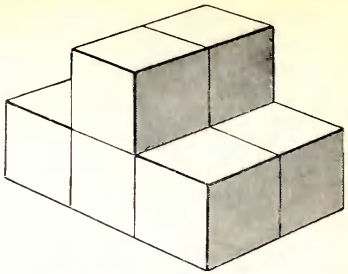
pînă la 7 din fig. 119. Pentru a identifica cele şapte corpuri, Piet Hein le-a numerotat. Nici o pereche de figuri nu este asemenea, deşi *5* şi *6* sînt una oglindirea celeilalte. Piet Hein subliniază că două cuburi pot fi reunite numai în lungul unei singure coordonate, trei cuburi pot adăuga o a doua coordonată, perpendiculară pe prima, iar pentru a avea o a treia coordonată, perpendiculară pe celelalte două, sînt necesare patru cuburi. Deoarece nu putem intra într-o a patra dimensiune, reunirea cuburilor în lungul acesteia în forme din cinci cuburi, este rezonabil să limităm la şapte mulţimea noastră de figuri soma. Este surprinzător că aceste combinaţii elementare de cuburi identice pot fi împreunate ca să dea iarăşi un cub.

Pe cînd Heisenberg continua să vorbească, Piet Hein s-a convins repede, prin nişte desene mîzgălite pe o hîrtie, că cele şapte figuri, care conţin 27 de cuburi mici, vor forma un cub de $3 \times 3 \times 3$. După terminarea conferinţei, el a confecţionat 27 de cuburi din care a format cele 7 componente şi şi-a verificat curînd revelaţia. O garnitură a acestor figuri a fost pusă în vînzare sub denumirea de soma, iar de atunci jocul a devenit popular în ţările scandinave.

Pentru a confecţiona un cub soma — şi îl îndemnăm pe cititor să o facă, deoarece aceasta îi furnizează un joc care va captiva ore întregi pe fiecare membru al familiei — nu aveţi decît să vă procuraţi o garnitură de cuburi pentru copii. Cele şapte figuri se construiesc uşor, aplicînd un strat de lipici pe feţele corespunzătoare, lăsîndu-le să se usuce şi strîngîndu-le împreună. De fapt, această jucărie este un fel de versiune tridimensională a poliominourilor, discutate în Cartea întîi.

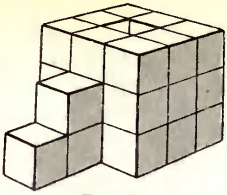
Ca o primă lecţie în arta soma, vedeţi dacă sînteţi în stare să combinaţi două figuri, ca să obţineţi structura în trepte din fig. 120. După ce aţi scos-o la capăt cu această problemă banală, încercaţi să asamblaţi toate cele şapte figuri, ca să vă dea un cub. Este una dintre cele mai uşore construcţii soma. Peste 230 de soluţii esenţial diferite (fără a număra rotaţiile şi oglindirile) au fost tabelate de Richard K. Guy, de la Universitatea din Malaya, Singapore, însă numărul exact ale acestor soluţii nu a fost încă determinat. O bună strategie pentru această construcţie ca şi pentru alte figuri soma constă în a aşeza întîi formele cele mai neregulate *(5, 6* şi *7)*, deoarece celelalte se ajustează mai uşor în golurile rămase în structură. În particular, cel mai bine este ca piesa *1* să fie ţinută în rezervă pînă la sfîrşit.

Fig. 120 Structură obținută din două figuri soma.

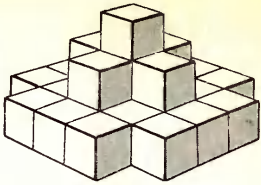


După ce ați terminat cu cubul, încercați-vă îndemînarea, construind structuri mai dificile din șapte piese, redate în fig. 121. În loc să recurgeți la o tehnică de probe și erori, care ia timp, este mult mai satisfăcător să analizați construcțiile și să scurtați timpul de realizare, după ce le-ați înțeles geometric. De exemplu, este evident că figurile *5*, *6* și *7* nu pot forma treptele spre fîntînă. Se pot face competiții în grup, dînd fiecărui jucător o garnitură soma și văzînd cine reușește să construiască în timpul cel mai scurt o figură dată. Pentru a evita interpretări greșite ale acestor structuri, menționăm că părțile din spate la piramidă și la vapor sînt exact la fel ca și cele din față; golul fîntînii și cel al căzii de baie au volumul a trei cuburi; nu există goluri sau piese ieșite în afară în părțile care nu se văd ale zgîrie-norului; iar coloana care formează partea din spate a capului cîinelui constă din patru cuburi, dintre care cel de la bază nu se vede.

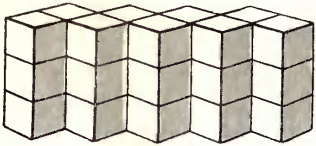
După ce au lucrat cîteva zile cu aceste figuri, multe persoane constată că formele devin atît de binecunoscute, încît reușesc să rezolve în gînd probleme de soma. Teste efectuate de psihologi europeni au stabilit că abilitatea de a rezolva probleme de soma este corelată, în linii mari, cu inteligența generală, însă cu discrepanțe particulare la ambele capete ale curbei I.Q. Unele genii sînt foarte slabe la soma, iar anumiți săraci cu duhul par deosebit de înzestrați cu tipul de vedere în spațiu pe care-l dezvoltă soma. Oricine participă la un astfel de test dorește să continue jocul și după terminarea testului.



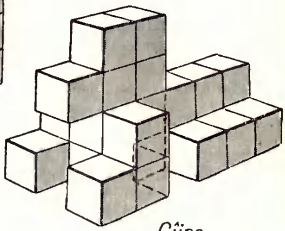
Fîntînă



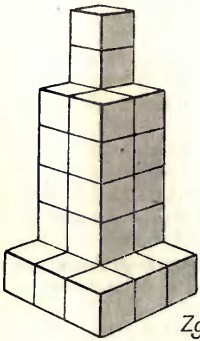
Piramidă



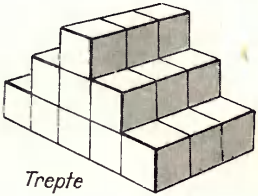
Zid



Cîine

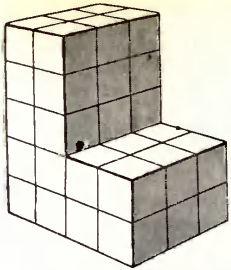


Zgîrie-nori

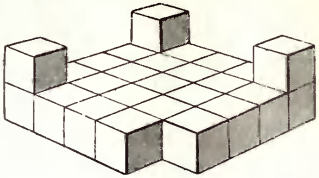


Trepte

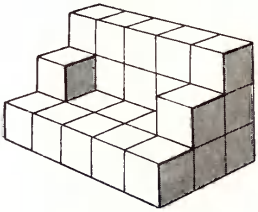
Fig. 121 Una dintre aceste 12 forme nu poate fi construită cu figurile soma.



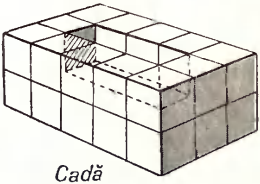
Fotoliu



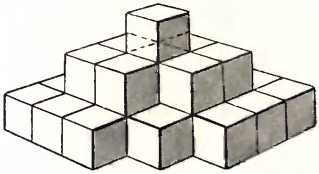
Castel



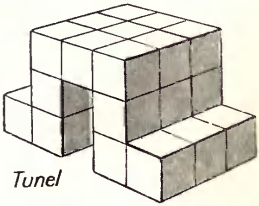
Canapea



Cadă



Vapor



Tunel

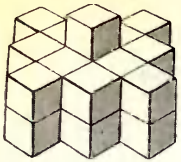


Fig. 122 O formă soma imposibilă (stînga). Un mijloc de etichetare a acestei forme (dreapta).

La fel cu poliominourile bidimensionale, construcțiile soma conduc de la sine la fascinante teoreme și demonstrații de imposibilitate în geometria combinatorie. Considerați structura din fig. 122 stînga. Nimeni nu a reușit încă să o construiască; abia recent a fost găsită o demonstrație de imposibilitate formală. Iată inteligenta demonstrație, descoperită de Solomon W. Golomb, matematician la Laboratorul de propulsie prin reacție de pe lîngă Institutul tehnologic din California.

Începem prin a privi structura de sus în jos, cum se arată în desenul din dreapta, și prin a colora coloanele ca pe o tablă de șah. Fiecare coloană are adîncimea de două cuburi, cu excepția celei din mijloc, care constă din trei. Aceasta ne dă un total de 8 cuburi albe și 19 negre, o disproporție de-a dreptul uimitoare.

Pasul următor constă în a examina fiecare dintre cele șapte componente, încercîndu-le în toate orientările posibile, pentru a ne asigura de numărul maxim al cuburilor negre, pe care le poate avea, dacă o transpunem în structura tablei de șah. Tabelul din fig. 123 ne prezintă acest număr maxim pentru fiecare componentă. După

FIGURI SOMA	MAXIMUL DE CUBURI NEGRE	MINIMUL DE CUBURI ALBE
1	2	1
2	3	1
3	3	1
4	2	2
5	3	**1**
6	3	1
7	2	2
	18	9

Fig. 123 Tabel pentru demonstrația de imposibilitate.

cum vedeți, totalul este 18 negre față de 9 albe, deci exact o diferență de unu față de ceea ce ne trebuie nouă, 19—8. Dacă mutăm blocul negru din vîrf deasupra uneia dintre coloanele albe, atunci raportul negru minus alb devine cel cerut, 19—8, iar structura devine posibilă.

Trebuie să mărturisesc că una dintre structurile din fig. 121 este irealizabilă. Pentru un cititor obișnuit ar fi nevoie poate de cîteva zile ca să descopere care anume. În secțiunea de răspunsuri nu voi da metoda de construcție a celorlalte figuri (este doar o chestiune de timp pînă reușiți cu oricare dintre ele), dar voi identifica figura care nu poate fi construită.

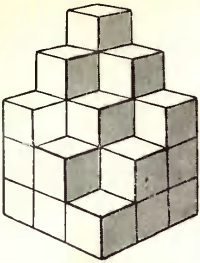
Numărul de structuri frumoase care se pot construi cu cele șapte figuri soma pare să fie tot atît de nemărginit ca și numărul de figuri plane, realizabile cu cele șapte forme tangram. Este interesant de menționat că dacă piesa *1* este pusă deoparte, celelalte șase vor forma o figură asemănătoare lui 1, însă de două ori mai înaltă.

ADAOS

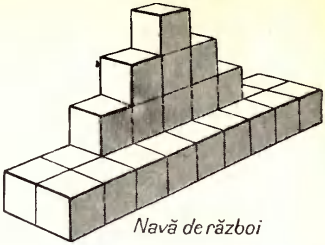
Pe cînd scriam articolul despre soma, credeam că prea puțini cititori își vor da efectiv osteneală de a face o astfel de garnitură. Era greșit. Mii de cititori mi-au trimis scheme ale unor noi figuri soma, iar mulți s-au plîns că timpul lor liber a fost înghițit, de cînd au căzut în mania soma. Unele cadre didactice au făcut garnituri soma pentru clasele lor. Unii psihologi au adăugat soma la testele lor psihologice. Pasionații somei au confecționat garnituri pentru prieteni internați în spitale și le-au utilizat drept cadouri. O duzină de firme au cerut drepturi de fabricație.

Din sutele de figuri soma noi, primite de la cititori, le-am ales pe cele douăsprezece reprezentate în fig. 124. Unele dintr-acestea au fost descoperite simultan de mai mulți cititori. Toate sînt construibile.

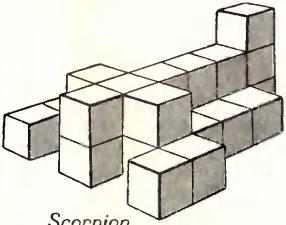
Farmecul jocului soma provine, în parte, după cum cred, din faptul că nu se folosesc decît șapte componente. Nu sîntem copleșiți de complexitate. Tot felul de variante, cu un număr mai mare de piese, se impun de la sine și am primit numeroase scrisori care le descriu.



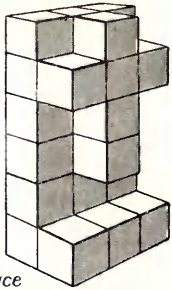
Cristal



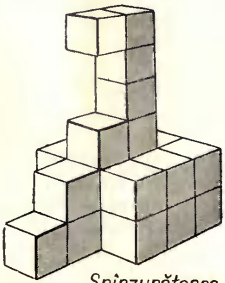
Navă de război



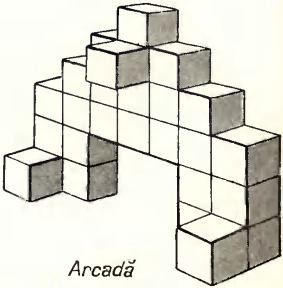
Scorpion



Cruce

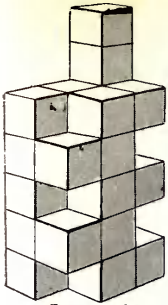


Spînzurătoare

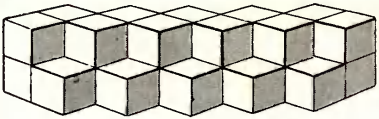


Arcadă

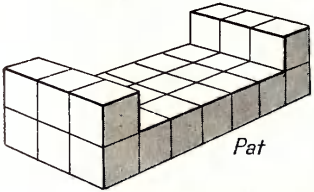
Fig. 124



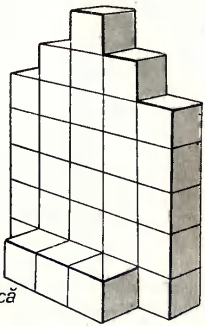
Bloc modern
de locuințe



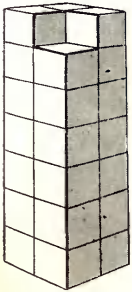
Zid



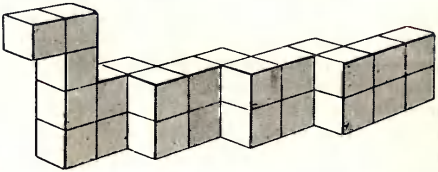
Pat



Biserică



Turn



Șarpe

Theodore Katsanis, din Seattle, într-o scrisoare din 23 decembrie 1957 (anterior apariției articolului despre soma), a propus o garnitură din opt piese diferite, care se pot obține cu patru cuburi. Garnitura cuprinde șase dintre piesele soma, plus un lanț rectiliniu de patru cuburi și un pătrat de 2 × 2. Katsanis le-a denumit „cuadricuburi"; ulterior, alți cititori au sugerat „tetracuburi". Natural, cele opt componente nu formează un cub; dar ele se potrivesc bine pentru a forma un solid dreptunghiular de 2 × 4 × 4. Este un model de două ori mai înalt al tetracubului pătrat. Este posibil să formăm modele similare ale fiecăreia dintre cele șapte componente. Katsanis a mai descoperit că cele opt piese pot fi împărțite în două garnituri de cîte patru, care formează fiecare cîte un solid dreptunghiular de 2 × 2 × 4. Aceste două solide pot fi apoi alăturate în diverse moduri, pentru a forma modele de mărime dublă a șase din cele opt piese. Într-un articol precedent (retipărit în Cartea întîi) am descris cele 12 pentominouri, forme plane obținute prin legarea între ele, în toate felurile posibile, a pătratelor de latură unu. R.M. Robinson, soția unui profesor de matematică de la Universitatea din California (Berkeley), a descoperit că dacă li se dă pentominourilor o a treia dimensiune, cu grosimea de o unitate, cele douăsprezece piese vor forma un solid dreptunghiular de 3 × 4 × 5. La această descoperire au ajuns independent și alții, printre care medicul Charles W. Stephenson, din South Hero, Vermont. Doctorul Stephenson a găsit și metode pentru a alătura pentominourile tridimensionale, ca să obțină solide dreptunghiulare de 2 × 5 × 6 și de 2 × 3 × 10.

Următorul pas în complexitate merge spre cele 29 de piese, formate prin alăturarea în toate modurile a cinci cuburi. În scrisoarea menționată mai sus, Katsanis face această sugestie și denumește piesele „pentacuburi". Șase perechi de pentacuburi sînt oglindiri. Dacă utilizăm numai cîte unul din fiecare pereche, numărul de pentacuburi scade la 23. Atît 29 cît și 23 sînt numere prime, din care cauză nu se poate construi un solid dreptunghiular cu nici una din aceste garnituri. Katsanis a propus o problemă de triplare: alegeți una din cele 29 de figuri, apoi utilizați 27 din cele 28 rămase ca să formați un model al figurii alese, dar cu o înălțime de trei ori mai mare.

O frumoasă garnitură de pentacuburi mi-a fost trimisă în 1960 de către David Klarner, din Napa, California. Le-am răsturnat

din cutia de lemn în care erau ambalate, şi nu am reuşit încă să le pun la loc. Klarner a consumat un timp considerabil dezvoltînd figuri pentacubice neobişnuite, iar eu am cheltuit un timp considerabil încercînd să construiesc unele dintre ele. Klarner îmi scrie că există 166 *hexacuburi* (figuri formate din cîte şase cuburi unitate), pe care a avut amabilitatea să *nu* mi le trimită.

RĂSPUNSURI

Singura structură din fig. 121 imposibil de construit cu cele şapte piese soma este zgîrie-norul.

S-a spus despre topologi că sînt matematicienii care nu știu să deosebească o ceașcă de cafea de un covrig. Căci un obiect de forma unei cești de cafea poate fi transformat teoretic într-unul de forma unui covrig, printr-un proces de deformare continuă; cele două obiecte sînt topologic echivalente, iar topologia poate fi definită cu aproximație, ca fiind studiul proprietăților invariante față de astfel de deformări. O mare varietate de divertismente matematice (inclusiv trucuri, jocuri și enigme de scamator) sînt strîns legate de analiza topologică. Poate că topologii le consideră banale, însă pentru noi ceilalți ele rămîn distractive.

În urmă cu cîțiva ani, Stewart Judah din Cincinnati a născocit un truc de societate neobișnuit, în care un șiret de ghete este înfășurat în jurul unui creion și al unui pai de citronadă. Cînd tragem de capetele șiretului, acesta pare să pătrundă în creion și să taie paiul în două. Dezvăluim aici trucul, cu permisiunea lui Judah.

Începeți prin a strivi paiul pînă devine plat și prin a atașa unul dintre capetele lui, cu ajutorul unei mici benzi de cauciuc, de capătul unui creion neascuțit (fig. 125, *1*). Îndoiți paiul cu capetele în jos și rugați pe cineva să țină creionul cu ambele mîini, astfel încît capătul de sus al creionului să se îndepărteze de dv., cu un unghi de 45°. Așezați mijlocul șiretului peste creion (*2*), apoi încrucișați șiretul în spatele creionului (*3*). Cît timp faceți înfășurarea, la orice încrucișare, același capăt — să zicem *a* — trebuie totdeauna să vină peste celălalt capăt. Altminteri trucul nu va putea fi executat.

Aduceți capetele șiretului în față, încrucișîndu-le în partea anterioară a creionului (*4*). Îndreptați paiul în așa fel, încît să vină în lungul creionului (*5*) și fixați capătul lui de sus de capătul de sus al creionului, cu altă bandă de cauciuc. Încrucișați șiretul deasupra paiului (*7*), ținînd minte că *b* trebuie să fie dedesubtul lui *a*. Încolăciți cele două capete și încrucișați-le din nou pe partea invizibilă

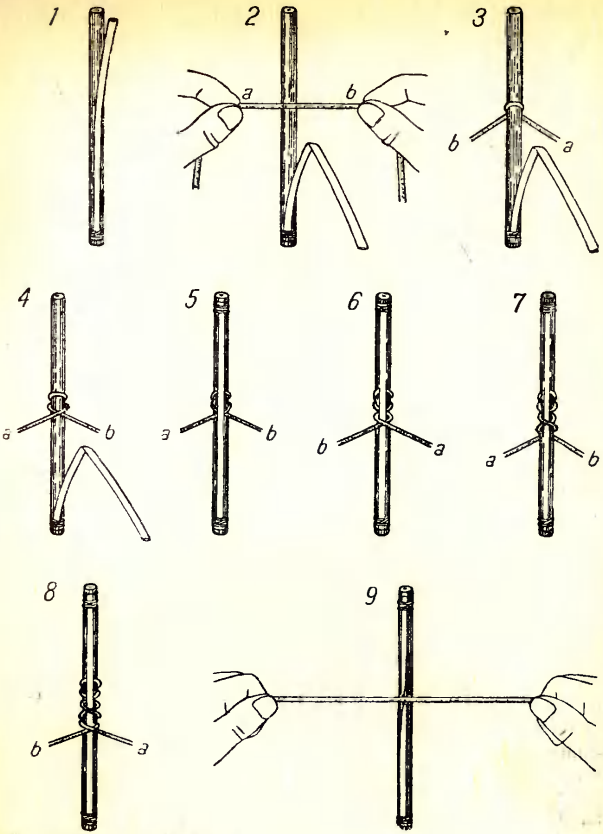


Fig. 125 Trucul de pătrundere al lui Stewart Judah.

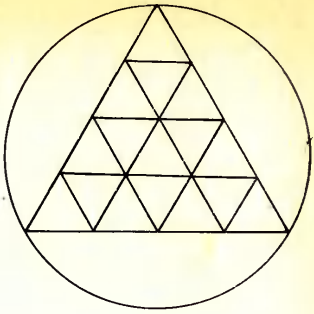
a creionului (7), iar apoi încrucişaţi-le pentru ultima dată în faţă (8). În aceste ilustraţii, şiretul este împins în lungul creionului, pentru a face mai clară procedura înfăşurării. În practică, înfăşurarea poate să fie grupată strîns pe la mijlocul creionului.

Cereţi spectatorului să ţină cu mai multă putere creionul în timp ce încordaţi şiretul, trăgînd de ambele lui capete. Număraţi pînă la trei şi smuciţi capetele. Ultima ilustraţie din fig. 125 prezintă rezultatul surprinzător. Şiretul se îndreaptă, dînd impresia că ar trece prin creion şi ar tăia paiul care (după explicaţia pe care o daţi) era prea slab ca să reziste acestei misterioase pătrunderi.

O analiză atentă a manipulării ne dezvăluie o explicaţie simplă. Deoarece capetele şiretului sînt înfăşurate în jurul creionului după două elice care sînt una oglindirea celeilalte, curba închisă formată de executant şi de şiret nu este înlănţuită cu curba închisă formată de spectator şi de creion. Şiretul taie paiul care ţine în loc elicele; apoi elicele se anihilează una pe cealaltă tot atît de limpede cum îşi anihilează o particulă antiparticula sa.

Numeroase enigme matematice tradiţionale sînt topologice. În fapt, topologia îşi are începutul în clasica analiză pe care Leonhard Euler a făcut-o, în 1736, problemei de a găsi un drum pentru a traversa cele 7 poduri din Koenigsberg fără a trece de două ori acelaşi pod. Euler a demonstrat că problema era matematic identică cu aceea de a trasa o anumită reţea închisă, dintr-o singură linie continuă, fără a trece de două ori peste vreo parte a reţelei. Probleme asemănătoare de trasare a unor drumuri sînt obişnuite în cărţile de enigme şi jocuri matematice. Înainte de a vă ocupa de una dintre ele, notaţi întîi cîte noduri (puncte care sînt extremităţi ale unor segmente de dreaptă) au un număr par de linii care conduc la ele şi cîte au un număr impar. (Vom avea totdeauna un număr par de noduri „impare"; c.f. problemei 8 din cap. 5, Cartea a doua.) Dacă toate nodurile sînt „pare", reţeaua poate fi desenată printr-un drum care începe indiferent unde şi se termină în acelaşi punct. Dacă sînt două puncte impare, reţeaua încă poate fi trasată, însă numai cu condiţia de a porni dintr-un nod impar şi de a termina în celălalt. Dacă, în general, problema este rezolvabilă, ea poate fi soluţionată şi printr-o linie care nu se intersectează în nici un punct. Dacă sînt mai mult decît două noduri impare, problema nu are soluţie. Este limpede că astfel de noduri trebuie să fie punctele terminale ale curbei, şi că orice linie continuă are sau două puncte terminale sau nici unul.

Fig. 126 Enigma trasării rețelei.



Dacă ținem minte aceste reguli culeriene, enigmele de acest tip sînt ușor de rezolvat. Totuși, prin adăugarea unor particularități suplimentare, astfel de enigme pot fi adesea transformate în probleme de cea mai înaltă clasă. Să considerăm, de pildă, rețeaua din fig. 126. Toate nodurile ei sînt pare deci știm că ea poate fi trasată printr-o singură curbă. În acest caz însă, permitem ca rețeaua să fie retrasată ori de cîte ori vrem, și putem începe în orice punct și termina în orice punct. Problema este: să se afle numărul minim de ocoluri la vîrfuri, necesare pentru a trasa rețeaua printr-o linie continuă. Bineînțeles, oprirea într-un punct și inversarea sensului de trasare este considerată un ocol.

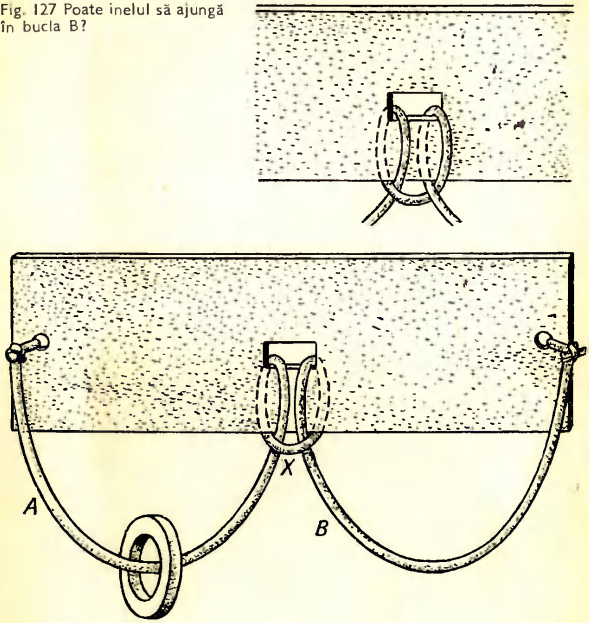
Enigmele mecanice în care intervin corzi și inele sînt adesea strîns legate de teoria topologică a nodurilor. După opinia mea, cea mai frumoasă dintre aceste enigme este cea redată în fig. 127. Dispozitivul se confecționează ușor dintr-o bucată de carton gros, un pic de sfoară și un inel destul de mare ca să nu poată trece prin gaura din mijlocul panoului. Cu cît cartonul este mai mare și coarda mai grea, cu atît dispozitivul este mai ușor de manevrat. Problema este simplă: să trecem inelul din bucla A în bucla B, fără a tăia coarda și fără a-i desface capetele.

Această enigmă este descrisă în numeroase cărți vechi de jocuri, de obicei într-o formă mai simplificată. În loc de a înnoda capetele corzii de panou, cum se arată aici, fiecare capăt trece printr-o gaură și este fixat de o mărgea, care împiedică capetele să iasă afară din

gaură. Aceasta permite o soluție neelegantă, în care bucla X este trasă prin cele două găuri de la capete și trecută peste mărgele. Enigma se poate rezolva însă printr-o metodă fină, în care capetele corzii nu joacă nici un rol. Este interesant de relevat că enigma nu are soluție dacă coarda este astfel împletită încît nodul X să treacă deasupra și dedesubtul celorlalte două bucle, cum se vede în fig. 127 sus.

Printre numeroasele jocuri matematice cu trăsături topologice interesante, se numără și celebrul joc oriental Go, precum și jocul

Fig. 127 Poate inelul să ajungă în bucla B?



„puncte și pătrățele", atît de popular în rîndurile copiilor. Acesta din urmă se joacă pe o arie dreptunghiulară de puncte, pe care adversarii trasează alternativ linii orizontale sau verticale care unesc cîte două puncte vecine. Ori de cîte ori un segment din acestea completează unul sau mai multe pătrățele, jucătorul le notează cu inițiala sa și trasează alt segment. După ce au fost completate toate segmentele, jucătorul care și-a pus inițialele în mai multe pătrățele este cîștigătorul. Jocul poate fi foarte captivant pentru jucători pricepuți, deoarece el abundă în ocazii de a sacrifica unele pătrățele, pentru a putea completa în schimb un număr mai mare, în altă parte.

Deși jocul cu punctele și pătrățelele este aproape tot atît de răspîndit ca și ticktacktoe, pînă acum nu a fost publicată vreo analiză matematică completă. În realitate, el este surprinzător de complicat, chiar pe un cîmp pătratic mic, de 16 puncte. Acesta este cîmpul cel mai mic la care jocul nu se poate termina nedecis, deoarece există nouă pătrate care pot fi capturate, dar după cîte sînt informat, nu s-a stabilit dacă strategia cîștigătoare este a primului jucător sau a celui de-al doilea.

David Gale, conferențiar de matematică la Universitatea Brown, a inventat un foarte frumos joc de reunire a unor puncte, pe care îmi voi îngădui să-l denumesc jocul lui Gale. La prima vedere, el pare asemănător cu jocul topologic hex, expus în Cartea întîi. În fapt, el are o structură total diferită (fig. 128). Cîmpul este o arie dreptunghiulară de puncte negre, îmbinată cu o arie dreptunghiulară similară de puncte colorate (În figură, punctele colorate sînt reprezentate prin cerculețe, iar liniile colorate sînt întrerupte.) Jucătorul *A* folosește un creion negru. Cînd îi vine rîndul, el reunește, orizontal sau vertical, două puncte negre. Obiectivul său este de a obține o linie continuă care să lege latura din stînga de cea din dreapta a cîmpului. Jucătorul *B* folosește un creion colorat, pentru a uni două puncte colorate. Obiectivul este o linie care să lege latura de sus de cea de jos a cîmpului. Nici o linie nu are voie să intersecteze un segment al adversarului. Jucătorii trag cîte o singură linie la fiecare mutare, iar cîștigătorul este cel ce completează primul o linie continuă între părțile sale pe cîmp. Figura reprezintă un joc în care cîștigătorul este cel cu creionul colorat.

Jocul lui Gale se poate juca pe cîmpuri de orice mărime, deși cîmpurile mai mici decît cel zugrăvit aici sînt prea ușor de analizat, ca să fie interesante pentru jucătorii care nu sînt începători. Se poate demonstra că primul jucător are strategia cîștigătoare pe un cîmp

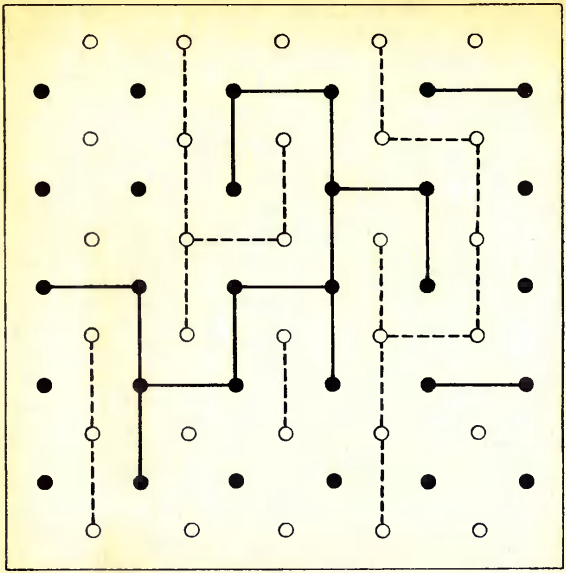


Fig. 128 Jocul topologic al lui Gale.

de indiferent ce mărime; demonstrația este aceeași ca pentru avantajul primului jucător în hex. Din nefericire, nici una dintre aceste demonstrații nu dă cheia naturii strategiei cîștigătoare.

ADAOS

În 1960, jocul lui Gale, așa cum este reprezentat aici, a fost comercializat de firma Hasenfield Brothers, Inc., Central Falls, Rhode Island, sub numele de Bridg-it. La Bridg-it, punctele sînt în relief pe o tablă și se joacă așezînd pe ea mici poduri din

masă plastică, pentru a lega între ele două puncte. Aceasta permite o variantă interesantă, explicată în instrucțiunile care însoțesc jocul. Fiecare jucător este limitat la un anumit număr de poduri, să zicem 10. Dacă nici unul nu a cîștigat după ce au fost așezate toate cele douăzeci de poduri, jocul continuă, prin transferarea cîte unui pod într-o nouă poziție, la fiecare mutare.

În 1951, cu șapte ani înainte ca jocul lui Gale să fi fost descris în articolul meu, Claude E. Shannon (actualmente profesor de teoria comunicațiilor și de matematică la Institutul tehnologic din Massachusetts) a construit primul robot jucător al jocului lui Gale, Shannon l-a denumit Colivia. Mașina sa face un joc excelent, deși nu perfect, cu ajutorul unui circuit calculator simplu, bazat pe calcule analogice printr-o rețea de rezistențe. În 1958, jocul lui Gale a fost realizat la o mașină proiectată de W.A.Davidson și V.C.Lafferty, doi ingineri care lucrau atunci la Fundația de cercetări din domeniul armamentului de pe lîngă Institutul tehnologic din Illinois. Ei nu cunoșteau mașina lui Shannon, dar și-au întemeiat proiectul pe principiul de bază descoperit anterior de Shannon.

Principiul operează în felul următor. O rețea de rezistențe corespunde liniilor de joc deschise unui jucător, să zicem *A* (fig. 129). Toate rezistențele au aceeași valoare. Cînd *A* trage o linie, rezistența corespunzătoare se scurtcircuitează. Cînd *B* trage o linie, rezistența corespunzătoare liniei lui *A*, care este *intersectată* de mutarea lui *B*, reintră în circuit. Întreaga rețea este deci scurtcircuitată (adică rezistența ei scade la 0) cînd cîștigă *A*, iar curentul este oprit cu totul (adică rezistența devine infinită) cînd cîștigă *B*. Strategia mașinii constă în a scurtcircuita sau în a conecta rezistența prin care trece voltajul maxim. Dacă două sau mai multe rezistențe prezintă același voltaj maxim, mutarea următoare se alege la întîmplare.

Shannon a construit efectiv două mașini colivie în 1951. În primul model, rezistențele erau mici becuri electrice, iar mutarea mașinii era determinată de observarea becului celui mai strălucitor. Deoarece era adesea greu de stabilit care bec este cel mai strălucitor, Shannon a construit un al doilea model, în care becurile erau înlocuite prin lămpi de neon, într-o rețea care permitea numai unei singure lămpi să se aprindă. Cînd se aprinde una, un circuit special previne aprinderea oricărei alte lămpi. Mutările se fac prin comutatoare care sînt toate în poziția de mijloc la

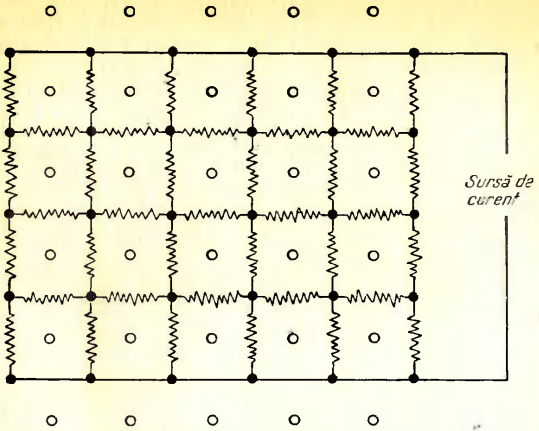


Fig. 129 Rețea de rezistențe pentru jocul lui Gale.

începutul jocului. Un jucător își face mutările închizînd un comutator, celălalt deschizînd un comutator.

După cum relatează Shannon, mașina cîștigă aproape totdeauna cînd are prima mutare. Din sute de jocuri în care are prima mutare, mașina a pierdut numai două, și ele se pot explica prin defecțiuni ale unor circuite sau printr-un joc impropriu. Dacă jucătorul uman are prima mutare, nu-i va fi prea greu să învingă mașina, însă aceasta cîștigă dacă adversarul ei face o eroare gravă.

RĂSPUNSURI

Problema de trasare a rețelei poate fi rezolvată prin 13 ocoluri. Porniți de la al doilea nod din stînga al triunghiului mare. Urcați în sus spre dreapta, cît de departe puteți, apoi la stînga, apoi în jos și la dreapta pînă la baza triunghiului, în sus și la dreapta, la stînga cît de departe posibil, în jos și la dreapta, la dreapta pînă

la vîrful triunghiului mare, în sus pînă la vîrful triunghiului, în jos pînă la vîrful din stînga, pe tot drumul în lungul cercului, la dreapta spre al treilea nod de la baza triunghiului, în sus și la stînga cît de departe posibil, la dreapta cît de departe posibil, apoi în jos și la stînga spre bază.

Jocul cu coarda și inelul se rezolvă astfel. Lărgiți bucla din mijloc, suficient încît inelul să poată fi trecut pe deasupra prin ea. Țineți inelul în fața părții frontale a panoului, în timp ce apucați coarda dublă acolo unde iese din gaura centrală. Trageți spre dv. coarda dublă. Aceasta va face să iasă din gaura centrală o dublă buclă. Treceți inelul prin bucla dublă. Acum puneți mîna în spatele panoului și trageți bucla dublă înapoi prin gaură, astfel încît coarda să revină la poziția inițială. Nu vă mai rămîne decît să plimbați inelul în jos peste bucla din mijloc, și enigma este rezolvată.

Numărul π (pi) raportul dintre lungimea circumferinței unui cerc și diametrul lui este cel mai cunoscut număr irațional, adică un număr a cărui dezvoltare în fracție zecimală continuă la infinit și fără repetări. Numărul irațional fi (φ) nu este atît de binecunoscut, dar el exprimă un raport fundamental, care este aproape tot atît de răspîndit ca și π, și are aceeași proprietate amuzantă de a apărea tocmai acolo unde ne așteptăm mai puțin. (De exemplu, vezi discuția la jocul petelor din cap. 13, Cartea a doua.)

O privire asupra dreptei din fig. 130 ne va lămuri semnificația geometrică a lui fi. Segmentul a fost împărțit în ceea ce se cheamă, de obicei, raportul de aur. Astfel, raportul dintre întreaga linie și segmentul A este același ca și cel dintre segmentul A și segmentul B. În fiecare caz, raportul este fi. Dacă lungimea lui B este egală cu 1, putem calcula ușor valoarea lui fi, din următoarea ecuație:

$$\frac{A+1}{A} = \frac{A}{1}.$$

Aceasta se poate scrie sub forma mai simplă a ecuației de gradul doi: $A^2 - A - 1 = 0$, care dă pentru A valoarea pozitivă

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aceasta este lungimea lui A și valoarea lui fi. Dezvoltarea în fracție zecimală este 1,61803398... Dacă lungimea lui A se ia egală cu 1 atunci B va fi inversul lui fi ($1/\varphi$). În mod curios, această

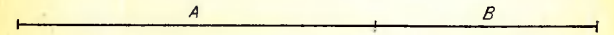


Fig. 130 Raportul de aur: raportul dintre A și B este egal cu raportul dintre A+B și A.

valoare este 0,61803398... Fi este unicul număr pozitiv care devine egal cu inversul său, dacă scădem din el 1.

La fel cu π, φ se poate exprima în mai multe moduri ca sumă a unei serii infinite. Extrema simplitate a următoarelor două exemple subliniază caracterul fundamental al lui φ

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

Grecii antici cunoșteau bine raportul de aur; nu există aproape nici o îndoială că el a fost folosit intenționat de către unii arhitecți și sculptori greci, îndeosebi la construcția Partenonului. Matematicianul american Mark Barr s-a referit la aceasta, acum 50 de ani, când a dat raportului de aur denumirea φ. Este prima literă grecească din numele marelui Fidias, despre care se crede că a utilizat adesea raportul de aur în sculpturile sale. Poate că unul dintre motivele pentru care pitagoricienii au ales ca simbol pentagrama, steaua cu cinci colțuri, stă în faptul că fiecare segment din această figură este într-un raport de aur față de segmentul mai mic cel mai apropiat.

Numeroși matematicieni din evul mediu și din Renaștere, ca Johannes Kepler, au fost captivați pînă la obsesie de raportul φ. La începutul splendidului său articol despre raportul de aur*, H.S.M. Coxeter îl citează pe Kepler: „Geometria posedă două mari comori: una este teorema lui Pitagora; cealaltă, împărțirea unui segment în raportul de extremă și medie. Prima poate fi comparată cu o măsură de aur; despre a doua putem spune că este o bijuterie prețioasă". Scriitorii Renașterii vorbesc despre acest raport ca despre o „proporție divină" sau, citîndu-l pe Euclid, ca un „raport dintre extremă și medie". Termenul „raportul de aur" a intrat în uz abia în secolul trecut.

Tratatul lui Luca Pacioli, apărut în 1509 și intitulat *De Divina Proportione*, ilustrat de Leonardo da Vinci (o ediție frumoasă a

* H.S.M. Coxeter, „Scripta Mathematica", vol. 19, nr. 2—3, pp. 135—143, iunie — septembrie 1953.

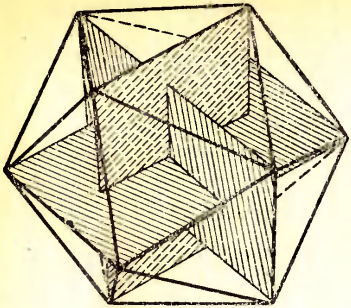


Fig. 131 Vîrfurile celor trei dreptunghiuri de aur coincid cu vîrfurile unui icosaedru.

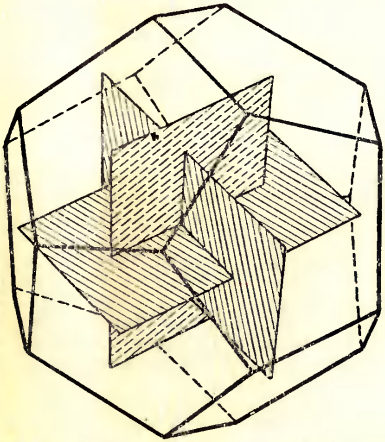


Fig. 132 Vîrfurile acelorași dreptunghiuri coincid cu centrele fețelor unui dodecaedru.

fost publicată la Milano, în 1956), este un fascinant compendiu al aparițiilor lui φ în diverse figuri plane și solide. De exemplu, φ este raportul dintre raza unui cerc și latura decagonului înscris. Iar dacă așezăm trei dreptunghiuri de aur (adică ale căror dimensiuni sînt în raportul φ astfel încît ele să se intersecteze simetric, fiecare perpendicular pe celelalte două, vîrfurile dreptunghiurilor vor marca cele 12 vîrfuri ale unui icosaedru regulat, ca și centrele celor 12 fețe ale unui dodecaedru regulat (vezi fig. 131 și 132).

Dreptunghiul de aur are numeroase proprietăți neobișnuite. Dacă decupăm cîte un pătrat dintr-o parte, figura rămasă va fi un dreptunghi de aur mai mic. Putem continua să înlăturăm pătrate, lăsînd dreptunghiuri de aur din ce în ce mai mici, cum se arată în fig. 133. (Este un exemplu de dreptunghi perfect carabil de ordin infinit. Vezi cap. 17, Cartea a doua.) Punctele consecutive care marchează diviziunea laturilor în raportul de aur se situează pe o spirală logaritmică, care se încolăcește spre interior la infinit. Polul ei este intersecția celor două diagonale punctate. Natural, aceste „pătrate încolăcite", cum au fost denumite, pot fi încolăcite la infinit și spre exterior, dacă desenăm pătrate din ce în ce mai mari.

Spirala logaritmică poate fi obținută și prin multe alte construcții în care intervine φ. O soluție elegantă recurge la un triunghi

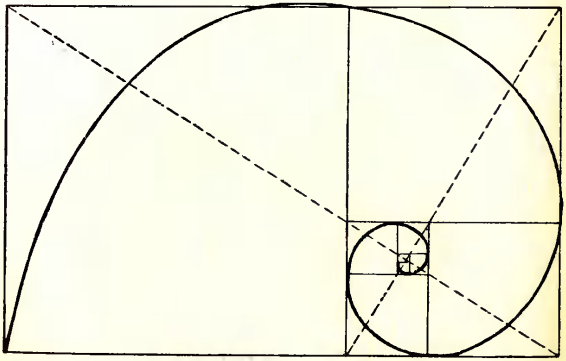


Fig. 133 Spirală logaritmică, indicată prin „pătrate încolăcite".

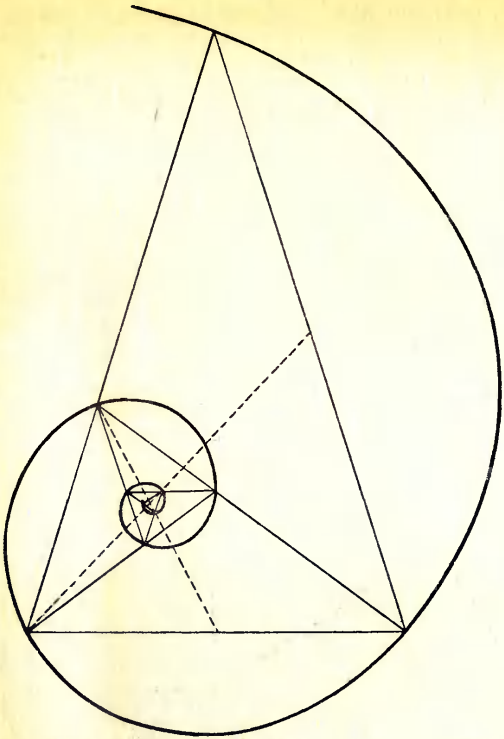


Fig. 134 Spirală logaritmică, indicată prin „triunghiuri încolăcite".

isoscel ale cărui laturi sînt într-un raport de aur față de bază (fig. 134). Fiecare unghi de la bază are 72°, fiind dublul unghiului de la vîrf, 36°. Acesta este triunghiul de aur care intervine în construcția

pentagramei. Dacă ducem bisectoarea unui unghi de la bază, ea va tăia latura opusă după un raport de aur, formînd două triunghiuri de aur mai mici, dintre care unul este asemenea cu cel inițial. La rîndul său, acesta poate fi împărțit printr-o bisectoare a unui unghi de la bază, iar procesul poate fi continuat la infinit, pentru a genera un șir de triunghiuri încolăcite care, la fel cu pătratele încolăcite, determină o spirală logaritmică. Polul acestei spirale este intersecția celor două mediane punctate.

Spirala logaritmică este unicul tip de spirală care nu-și modifică forma pe măsură ce crește, fapt care explică marea ei frecvență în natură. De exemplu, pe măsură ce molusca din interiorul unui nautilus compartimentat crește ca mărime, scoica se mărește după o spirală logaritmică, astfel încît molusca are totdeauna un cămin identic. Centrul unei spirale logaritmice, examinat la microscop, va arăta exact la fel cu spirala pe care ați vedea-o dacă ați prelungi curba pînă cînd ar deveni mare cît o galaxie și v-ați uita la ea de la o distanță astronomică.

Spirala logaritmică este intim legată de șirul lui Fibonacci (1, 1,2,3,5,8,13,21,34,...), în care orice termen este suma celor doi termeni precedenți. Creșterea biologică prezintă adesea o schemă Fibonacci. Exemplele citate de obicei sînt spațiile dintre frunze în lungul unei ramuri și dispunerea petalelor unor flori și a unor semințe. Numărul φ intervine și aici, deoarece raportul dintre doi termeni consecutivi ai șirului Fibonacci se apropie tot mai mult de φ, pe măsură ce seria crește. Astfel 5/3 este destul de aproape de φ (un carton cu dimensiunile de 3×5 este greu de deosebit de un dreptunghi de aur), însă 8/5 este mai aproape de fi, iar 21/13 este 1,619, ceea ce este și mai aproape. În fapt, dacă pornim de la două numere oarecare și formăm un șir aditiv (de exemplu 7,2,9,11,20,...), are loc aceeași convergență. Cu cît șirul continuă mai mult, cu atît raportul dintre doi termeni consecutivi se apropie de fi.

Aceasta se poate ilustra limpede cu ajutorul pătratelor încolăcite. Începem cu două pătrate mici, de indiferent ce mărime, să zicem pătratele A și B din fig. 135. Latura pătratului C este suma laturilor lui A și B, D este suma lui B și C, E — suma lui C și D etc. Oricare ar fi mărimile celor două pătrate inițiale, pătratele încolăcite se apropie tot mai mult de un dreptunghi de aur.

Există un paradox geometric care pune pregnant în evidență legătura lui φ cu șirul lui Fibonacci. Dacă împărțim un pătrat în 64 de pătrate unitate (vezi fig. 136), cele patru bucăți pot fi împreunate iarăși ca să formeze un dreptunghi de 65 de unități pătrate.

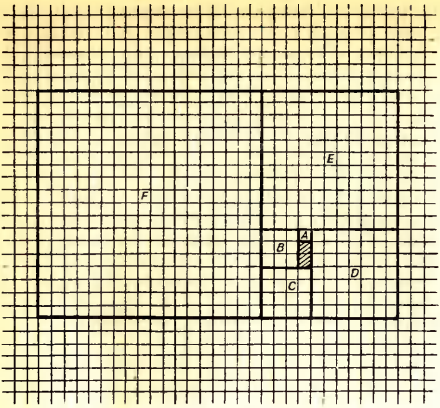


Fig. 135 Pătratele ilustrează convergența spre φ a raportului dintre termenii consecutivi ai oricărui șir aditiv.

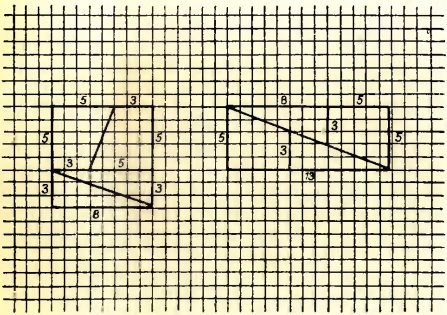


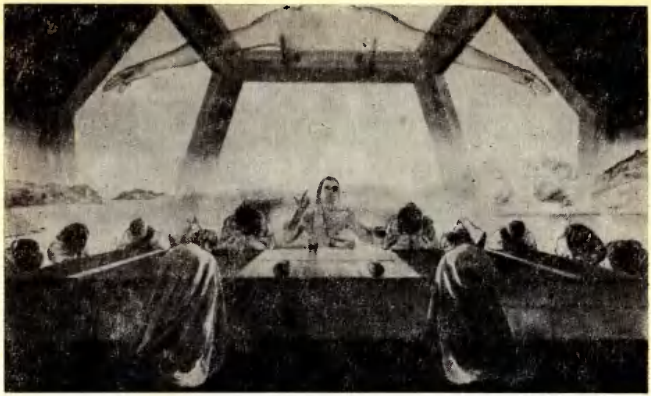
Fig. 136 Un paradox bazat pe proprietățile oricărui șir aditiv.

Paradoxul se explică prin faptul că fragmentele nu se potrivesc exact după diagonala mai lungă, unde există un spațiu egal cu o unitate pătrată. Observați că lungimile segmentelor de dreaptă din aceste figuri sînt termeni ai unui șir al lui Fibonacci. În fapt, putem tăia pătratul astfel încît segmentele să fie termeni consecutivi în orice șir aditiv, și vom obține totdeauna o formă a paradoxului, deși în unele cazuri dreptunghiul cel lung va cîștiga în arie, în altele va pierde, din cauza unor încălecări în lungul diagonalei. Aceasta reflectă faptul că termenii consecutivi ai oricărui șir aditiv sînt într-un raport care este alternativ mai mare sau mai mic decît φ.

Singura manieră de a secționa un pătrat, în așa fel încît să nu avem pierdere sau cîștig de arie la dreptunghi, constă în a-l tăia după segmente a căror lungime este luată din șirul aditiv 1, φ, $\varphi + 1$, $2\varphi + 1$, $3\varphi + 2$,... Altă cale de a scrie acest șir este 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4,... Este unicul șir aditiv în care raportul dintre orice pereche de termeni consecutivi este constant. (Raportul este, firește, φ). Este șirul de aur spre care tinde să se transforme orice șir aditiv.

În ultima vreme a apărut o literatură imensă consacrată lui φ și problemelor înrudite, care este aproape tot atît de excentrică, cum a fost literatura consacrată cvadraturii cercului, în care era vorba despre π. Lucrarea clasică este cartea germană de 457 pagini, *Der goldene Schnitt*, scrisă de Adolf Zeising și publicată în 1884. Zeising încearcă să argumenteze că raportul de aur este cel mai plăcut din punct de vedere artistic dintre toate proporțiile și că el ne oferă cheia pentru înțelegerea oricărei morfologii (inclusiv anatomia omului) a artei, a arhitecturii și chiar a muzicii. Mai puțin stranii, dar comparabile, sînt lucrarea lui Samuel Colman, *Nature's Harmonic Unity* (1913) și cea a lui Teodore Cook, *The Curves of Life* (1914).

Estetica experimentală a pornit, se poate spune, de la încercările lui Gustav Fechner de a da un suport empiric concepțiilor lui Zeising. Marele psiholog german a măsurat mii de ferestre, rame de tablouri, cărți de joc, cărți și alte dreptunghiuri și a verificat punctele în care erau împărțite crucile din cimitire. El a constatat că raportul mediu se apropie de φ. De asemenea, el a inventat numeroase teste ingenioase, în care persoanele subiect alegeau cel mai frumos dreptunghi dintr-un grup, desenau cel mai frumos dreptunghi, barau o cruce care le plăcea cel mai mult etc. El a mai stabilit că media preferințelor tinde către φ. Însă experimentele sale deschizătoare de drum erau insuficient de fine, iar lucrări mai recente pe aceeași linie au ajuns doar la concluzia nebuloasă că cei mai mulți



Cina cea de taină a lui Salvador Dali. Galeria națională de artă. Washington

oameni preferă un dreptunghi situat undeva între pătrat și un dreptunghi cu lungimea egală cu dublul lățimii.

Americanul Jay Hambidge, decedat în 1924, a scris mai multe cărți în apărarea a ceea ce numea „simetrie dinamică", o aplicație a geometriei (în care φ are un rol conducător) în artă, arhitectură, în proiectarea mobilei și chiar la desenul literelor de tipar. Prea puțini mai iau astăzi în serios opera sa, deși se mai întîmplă ca un pictor sau un arhitect talentat să recurgă în mod deliberat la raportul de aur. De exemplu, George Bellows a folosit cîteodată raportul de aur la planul unei compoziții picturale. „Cina cea de taină" a lui Salvador Dali (care aparține Galeriei naționale de artă din Washington) este pictată în interiorul unui dreptunghi de aur, iar alte dreptunghiuri de aur sînt folosite pentru stabilirea poziției personajelor. Deasupra mesei plutește o parte dintr-un dodecaedru imens.

Frank A.Lonc, din New York, s-a ocupat mult de numărul φ. Broșurile scrise de el puteau fi obținute de la Tiffany Thayer's Fortean Society, care colporta și o riglă de calcul germană în care figura φ. (Societatea a fost desființată după moartea lui Thayer, în 1959.) Lonc a confirmat una dintre teoriile favorite ale lui Zei-

sing, măsurînd înălțimea a 65 de femei și comparînd cifrele obținute cu înălțimea ombilicului lor; el a obținut raportul mediu 1,618+. El a denumit aceasta „constanta de relativitate a lui Lonc". „Persoanele ale căror măsuri nu se încadrează în acest raport, scrie el, au suferit în copilărie răniri ale șoldului sau alte accidente deformante". Lonc tăgăduiește că dezvoltarea în fracție zecimală a lui π este 3,14159..., cum crede toată lumea. El a calculat-o mai exact, luînd pătratul lui φ, înmulțind rezultatul cu 6, împărțind apoi cu 5, pentru a obține 3,14164078644620550.

Închei cu o interesantă problemă în care intervin φ și emblema devenită celebră datorită lui Charles de Gaulle: crucea cu două brațe din fig. 137. Crucea este formată aici din 13 pătrate de cîte o unitate. Problema constă în a trage o linie dreaptă prin punctul A, astfel încît aria părții hașurate să fie egală cu aria restului. Cît de lung este segmentul BC, dacă linia este așezată corect? (În figură, diagonala este desenată greșit, pentru a nu da cheia la poziția corectă.)

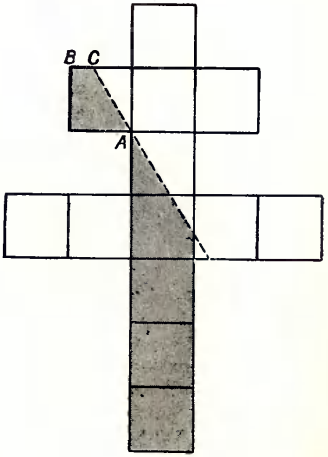


Fig. 137 Ce lungime are segmentul BC?

Am primit multe scrisori cu informații, relativ la articolul despre φ. Mai mulți cititori au arătat că, în majoritatea cărților și revistelor de matematică, simbolul obișnuit pentru raportul de aur este τ (tau) și nu φ (fi). Este adevărat, însă φ se folosește în multe cărți consacrate acestui subiect și este simbolul cel mai frecvent utilizat în literatura de matematică recreativă. De exemplu, Willliam Schaaf îl utilizează în observațiile introductive la capitolul despre raportul de aur din lucrarea sa bibliografică *Recreational Mathematics*, publicată recent de Consiliul național al profesorilor de matematică.

David Johnson, de la Philco Corporation, Palo Alto, California, a folosit calculatorul TRANSAC S-2000 al firmei pentru a determina 2 878 de zecimale ale lui φ. Mașina a făcut această treabă în ceva mai puțin de 4 min. Pentru cei ce se interesează de studiul numerelor, pot menționa că neobișnuitul șir 177111777 apare printre primele 500 de zecimale.

L.E.Hough, un cititor din Nome, Alaska, mi-a scris pentru a arăta că cele două diagonale punctate din fig.133, ca și cele două mediane punctate din fig. 134 sînt într-un raport de aur.

Stephen Barr, al cărui tată, Mark Barr, a dat lui φ acest nume, mi-a trimis tăieturi dintr-un articol al tatălui său (publicat la Londra, în „Sketch", cam în 1913), în care φ este generalizat, după cum urmează. Dacă formăm un șir de trei pași, unde fiecare termen este suma celor trei termeni precedenți, termenii se apropie de raportul 1,8395+. Un șir de patru pași, unde fiecare termen este suma celor patru precedenți, se apropie de raportul 1,9275+. În general,

$$n = \frac{\lg (2 - x)^{-1}}{\lg x},$$

unde n este numărul de pași, iar x raportul către care tinde seria. Dacă n este 2, avem cunoscutul șir al lui Fibonacci, în care x este φ. Cînd n tinde către infinit, x tinde către 2.

Teoria lui Zeising despre înălțimea mobilicului continuă să circule și în cărți relativ recente. De exemplu, în cartea *The Geometry of Art and Life*, de Matila Ghyka, publicată de editura Sheed and Ward, în 1946, citim că „de fapt, putem susține că, dacă măsurăm raportul pentru un mare număr de trupuri de bărbați și de femei, valoarea medie obținută ar fi 1,618". Aceasta are cam tot

atît de mult înțeles ca și calculul „raportului mediu dintre lungimea ciocului unei păsări și lungimea picioarelor ei". Ce colectiv utilizăm pentru a obține media: indivizi luați la întîmplare din New York, din Șanhai sau din populația întregului glob? Situația este și mai proastă dacă ținem seama că amestecul tipurilor de trupuri în lume, și chiar pe o porțiune mică a globului, este departe de a fi constant.

RĂSPUNSURI

Problema bisectării crucii lorene poate fi rezolvată algebric, punînd x pentru lungimea CD (fig.138) și y pentru lungimea MN. Dacă linia diagonală taie crucea în două, triunghiul haşurat trebuie să aibă o arie de 2,5 unități. Aceasta ne permite să scriem ecuația $(x + 1)(y + 1) = 5$. Triunghiurile ACD și AMN fiind asemenea, mai putem scrie ecuația $x/1 = 1/y$.

Cele două ecuații combinate dau pentru x valoarea $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

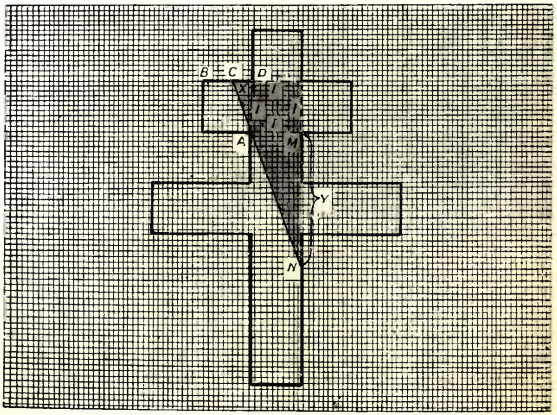


Fig. 138 Soluția la problema crucii cu două brațe

De aceea, lungimea lui BC este $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, adică 0,618+, care este inversul lui φ $(1/\varphi)$. Cu alte cuvinte, punctul C împarte segmentul BD în raportul de aur. Extremitatea de jos a diagonalei împarte şi ea latura pătratului unitate în raportul de aur. Linia bisectoare are lungimea $\sqrt{15}$.

Pentru a obţine punctul C cu rigla şi compasul, putem adopta una dintre numeroasele metode simple care provin de la Euclid. Iată una dintre ele:

Desenaţi BE cum se arată în fig.139. Ea taie în două părţi egale pe AD, făcînd ca DF să fie jumătatea lui BD. Înfigînd vîrful compasului în F, descrieţi un arc de cerc cu raza DF, care intersectează pe BF în G. Cu vîrful compasului în B, descrieţi un arc de cerc cu

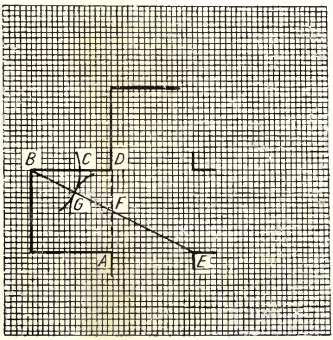


Fig. 139

raza BG, care intersectează pe BD în C. BD este acum împărţit în raportul de aur cerut.

Mai mulţi cititori au găsit metode mai uşoare de a rezolva problema. Nelson Max, din Baltimore, a dat cea mai simplă construcţie pentru linia bisectoare. Un semicerc cu o extremitate în A (fig. 138) şi cu cealaltă într-un punct situat la trei unităţi de A intersectează partea din dreapta a crucii într-un punct N.

Capitolul 9

MAIMUȚA ȘI NUCILE DE COCOS

La 9 octombrie 1926, ziarul „The Saturday Evening Post" a publicat povestirea scurtă *Nucile de cocos* a lui Ben Ames Williams. Povestirea se referă la un antreprenor de construcții, îngrijorat de felul în care ar putea să împiedice un concurent să pună mîna pe un contract important. Un funcționar șiret al antreprenorului, care cunoștea pasiunea concurentului pentru matematica recreativă, i-a prezentat o problemă atît de exasperantă, încît acesta, preocupat de rezolvarea ei, a pierdut termenul de înaintare a ofertei.

Iată problema, exact așa cum a formulat-o funcționarul din povestirea lui Williams:

„Cinci oameni și o maimuță au naufragiat pe o insulă pustie și și-au petrecut prima zi culegînd nuci de cocos, ca să aibă ce mînca. Le-au așezat pe toate grămadă și s-au culcat.

Pe cînd dormeau toți, unul dintre oameni s-a trezit și gîndindu-se că ar putea să iasă scandal dimineața la împărțirea nucilor de cocos, s-a hotărît să-și ia partea lui. A împărțit nucile de cocos în cinci grămezi. A lăsat de o parte o nucă pentru maimuță și apoi și-a ascuns grămada lui, iar pe celelalte le-a pus la un loc.

Rînd pe rînd, cîte unul dintre oameni se trezea și proceda la fel. Fiecare lăsa cîte o nucă de cocos de o parte, pentru maimuță. Și toți cei cinci bărbați au făcut la fel, unul după altul; fiecare a luat din grămadă, cînd s-a trezit, o cincime din nucile de cocos, și fiecare a lăsat cîte o nucă pentru maimuță. Dimineața și-au împărțit nucile de cocos rămase, și împărțirea s-a făcut exact. Firește, toți știau că lipseau nuci de cocos; dar fiecare era tot atît de vinovat ca și ceilalți, așa că și-au ținut cu toții gura. Cîte nuci de cocos au fost la început?"

Williams a neglijat să dea răspunsul în povestirea sa. Se spune că, în prima săptămînă după apariția ei, birourile lui „The Saturday Evening Post" au fost invadate de vreo 2 000 de scrisori. George

Horace Lorimer, pe atunci redactor șef, i-a trimis lui Williams următoarea telegramă istorică:

DE DRAGUL LUI MIKE, CÎTE NUCI DE COCOS? AICI ESTE UN INFERN.

Timp de 20 de ani, Williams a continuat să primească scrisori care cereau răspunsul sau care propuneau noi soluții. Astăzi problema nucilor de cocos este, probabil, enigma diofantică la care s-a lucrat cel mai mult și la care s-au dat cele mai puține soluții. (Termenul diofantic vine de la Diofant din Alexandria, un algebrist grec, primul care a analizat mai pe larg ecuațiile care cer soluții în numere raționale.)

Williams nu este iventatorul problemei nucilor de cocos. El nu a făcut decît să modifice o problemă mai veche, pentru a o face mai încurcată. Varianta mai veche este aceeași, numai că dimineața, la ultima împărțire, se pune deoparte din nou o nucă de cocos pentru maimuță; în versiunea lui Williams, ultima împărțire se face exact. Unele ecuații diofantice au un răspuns unic (de exemplu, $x^2 + 2 = y^3$); unele au un număr finit de soluții; altele (de exemplu, $x^3 + y^3 = z^3$) nu au soluție. Ambele variante ale problemei nucilor de cocos, a lui Williams și predecesoarea ei, au o infinitate de soluții în numere întregi. Sarcina noastră este de a găsi cel mai mic număr pozitiv.

Varianta mai veche poate fi exprimată prin următoarele șase ecuații nedeterminate, care reprezintă cele șase împărțiri succesive ale nucilor de cocos. N este numărul inițial; F, numărul primit de fiecare marinar la împărțirea finală. Cifrele 1 din dreapta sînt nucile de cocos rezervate maimuței. Fiecare literă figurează pentru un întreg pozitiv necunoscut:

$$\begin{aligned} N &= 5A + 1 \\ 4A &= 5B + 1 \\ 4B &= 5C + 1 \\ 4C &= 5D + 1 \\ 4D &= 5E + 1 \\ 4E &= 5F + 1 \end{aligned}$$

Prin metode algebrice unanim cunoscute aceste ecuații pot fi reduse ușor la următoarea ecuație diofantică cu două necunoscute:

$$1\,024\ N = 15\,625\ F + 11\,529.$$

Această ecuație este mult prea greu de soluționat prin încercări și erori, și deși există un procedeu standard pentru a o rezolva

printr-o utilizare ingenioasă a fracțiilor continue, metoda este lungă și laborioasă. Ne vom ocupa aici de o soluție cam stranie dar de o frumoasă simplitate, în care intervine noțiunea de nuci de cocos *negative*. Această soluție este atribuită, de unii, fizicianului P.A.M.Dirac, de la Universitatea din Cambridge, dar, ca răspuns la întrebarea mea, prof.Dirac mi-a scris că a obținut soluția de la J.H.C.Whitehead, profesor de matematică la Universitatea din Oxford (și nepot al celebrului filozof). La o întrebare similară, prof. Whitehead a răspuns că a primit soluția de la altcineva; nu am urmărit chestiunea mai departe.

Indiferent de cel care a conceput cel dintîi nucile de cocos negative, el a raționat cam astfel. Deoarece N se împarte de șase ori în cinci grămezi, este clar că 5^6 (sau 15 625) se poate aduna la orice soluție pentru a da soluția imediat mai mare. În realitate, se poate adăuga orice multiplu de 5^6, și de asemenea se poate scădea orice multiplu. Scăderea multiplilor de 5^6 ne va da, firesc, eventual o infinitate de soluții în numere negative. Acestea vor satisface ecuația inițială, dar nu și problema inițială, care cere o soluție în numere întregi pozitive.

Evident, nu există o valoare pozitivă mică pentru N care să întrunească condițiile, dar poate că există o soluție simplă negativă. Trebuie numai să aplicăm puțin metoda probelor și a erorilor, pentru a descoperi faptul uluitor că există în adevăr o astfel de soluție: -4. Să vedem cît de elegant operează aceasta.

Primul marinar se apropie de grămada de -4 nuci de cocos, pune de o parte o nucă de cocos pozitivă pentru maimuță (este indiferent dacă maimuța își capătă nuca de cocos înainte sau după împărțirea în cinci), lăsînd astfel cinci nuci de cocos negative. Pe acestea le împarte în cinci grămezi, cîte o nucă de cocos negativă în fiecare. După ce a ascuns o grămadă, rămîn patru nuci de cocos negative, exact același număr ca la început! Ceilalți marinari efectuează același ritual fantomatic, întreaga procedură lăsînd pe fiecare marinar în posesia a două nuci de cocos negative, iar maimuța, care iese cel mai bine din această operație inversată, își strînge fericită cele șase nuci de cocos pozitive. Pentru a găsi răspunsul la întrebarea care este cel mai mic întreg pozitiv, nu avem acum decît să adunăm 15 625 la -4 pentru a obține 15 621, soluția căutată.

Această abordare a problemei ne furnizează imediat o soluție generală pentru n marinari, care iau fiecare cîte a n-a parte din nucile de cocos, la fiecare împărțire în n. Dacă avem patru marinari,

începem cu trei nuci de cocos negative și adăugăm 4^5. Dacă sînt șase marinari, începem cu cinci nuci de cocos negative și adăugăm 6^7, și așa mai departe pentru celelalte valori ale lui n. Mai formal, numărul inițial al nucilor de cocos este $k(n^{n+1}) - m(n-1)$, unde n este numărul de oameni, m numărul de nuci date maimuței la fiecare împărțire, iar k un întreg arbitrar, numit parametru. Pentru $n = 5$ și $m = 1$, obținem cea mai mică soluție pozitivă, dacă alegem parametrul 1.

Din nefericire, acest procedeu amuzant nu se aplică variantei lui Williams, în care maimuța nu-și capătă nuca de cocos la ultima împărțire. Las pe seama cititorilor să obțină soluația variantei lui Williams. Natural, ea poate fi obținută prin metodele diofantice obișnuite, dar există un drum mai scurt, care duce repede la țintă, dacă profitați de avantajele oferite de informația referitoare la varianta expusă mai sus. Pentru cei care consideră problema a treia dificilă, iată aici o problemă foarte simplă cu nuci de cocos, fără nici un fel de dificultăți diofantice.

Trei marinari dau peste o grămadă de nuci de cocos. Primul marinar ia jumătate plus o jumătate de nucă. Al doilea marinar ia jumătate din cît a rămas plus o jumătate de nucă de cocos. Al treilea marinar ia și el jumătate din cît a rămas plus o jumătate de nucă de cocos. Mai rămîne exact o singură nucă de cocos, pe care o dau maimuței. Cîte nuci de cocos au fost în grămada inițială? Dacă luați 20 de bețe de chibrit, veți avea un amplu material pentru o soluție prin încercări și erori.

ADAOS

Dacă utilizarea nucilor de cocos negative pentru rezolvarea versiunii mai vechi a problemei lui Ben Ames Williams nu pare chiar legitimă, un truc în esență identic se poate efectua colorînd în albastru patru nuci de cocos. Norman Anning, fost profesor la Facultatea de matematică a Universității din Michigan, a descoperit acest artificiu de colorare încă în 1912, cînd a publicat în „School Science and Mathematics", iunie, 1912, p.520 o soluție la o problemă cu trei oameni și o cantitate de mere. Felul în care Anning își aplică metoda la problema nucilor de cocos este următorul:

Începem cu 5^6 nuci de cocos, care este cel mai mic număr care poate fi împărțit exact în cincimi. Eliminăm o cincime și repetăm

procesul de șase ori, fără nucile de cocos date maimuței. Patru dintre cele 5^6 nuci de cocos se vopsesc acum cu albastru și se pun la o parte. Cînd restul cantității de nuci de cocos este împărțit în cincimi, va rămîne, natural, una pentru maimuță.

După ce primul marinar și-a luat partea, iar maimuța și-a primit nuca de cocos, punem cele patru nuci de cocos albastre înapoi cu celelalte, ca să formăm o grămadă din 5^5 nuci de cocos. Firește, aceasta se împarte exact la 5. Înainte de a proceda la următoarea împărțire însă, punem iarăși de o parte cele patru nuci de cocos albastre, astfel încît împărțirea va lăsa o nucă de cocos suplimentară pentru maimuță.

Acest procedeu — de a împrumuta nucile de cocos albastre numai cît timp ne trebuie ca să vedem că se poate face o împărțire exactă în cincimi și punîndu-le iarăși la o parte — se repetă la fiecare împărțire. După a șasea și ultima împărțire, nucile de cocos albastre rămîn deoparte, neaparținînd nimănui. Ele nu joacă un rol esențial în operație, servind numai ca să clarifice situația în timpul procedurii.

Cititorii pe care-i interesează asimilarea metodei standard de soluționare a ecuațiilor diofantice de gradul întîi prin utilizarea fracțiilor continue vor găsi o expunere clară în Helen Merrill, *Mathematical Excursions*, retipărită într-un volum broșat de către editura Dover, în 1957. Este o tehnică comodă pentru cei ce se ocupă cu probleme distractive, deoarece foarte multe enigme celebre se bazează pe acest tip de ecuație (vezi, de exemplu, problema 8, cap.14, Cartea a doua).

Există tot felul de alte căi pentru a rezolva problema nucilor de cocos. John M. Danskin, de la Institutul de înalte studii din Princeton, ca și numeroși alți cititori ne-au comunicat metode ingenioase de a rezolva problema, recurgînd la un sistem de numerație cu baza 5. Foarte mulți cititori mi-au scris pentru a expune alte abordări neobișnuite, dar toate sînt cam prea complicate pentru a fi expuse aici.

RĂSPUNSURI

Numărul de nuci de cocos din varianta lui Williams este 3 121. Știm din analiza versiunii mai vechi că 5^5-4, adică 3 121 este cel mai mic număr care va permite cinci împărțiri exacte ale nucilor de cocos, astfel încît maimuța să capete cîte una la fiecare împăr-

țire. După ce vor fi fost făcute aceste cinci împărțiri, vor rămîne 1 020 nuci de cocos. Constatăm că acest număr este divizibil prin 5 ceea ce permite a șasea împărțire, în care maimuța nu capătă nimic.

În această variantă a problemei, o soluție mai generală ia forma a două ecuații diofantice. Cînd n, numărul de oameni, este impar, ecuația devine:

numărul de nuci de cocos $= (1 + nk)n^n - (n - 1)$.

Dacă n este par, atunci

numărul de nuci de cocos $= (n - 1 + nk)n^n - (n - 1)$.

În ambele ecuații, k este un parametru care poate lua orice valoare întreagă. În problema lui Williams, numărul de oameni este 5, impar, deci substituim 5 pentru n în prima ecuație și luăm pe $k = 0$ ca să obținem răspunsul pozitiv cel mai mic.

O scrisoare a doctorului J. Walter Wilson, un dermatolog din Los Angeles, ne comunică o coincidență amuzantă în legătură cu acest rezultat:

Domnilor,

Am citit povestirea lui Ben Ames Williams despre problema nucilor de cocos în 1926, am stat o noapte nedormit, încercînd să o rezolv, fără succes, apoi am aflat de la un profesor de matematică în ce fel să folosesc ecuația diofantică pentru a obține răspunsul cel mai mic, 3 121.

În 1939, am observat dintr-o dată că vila din vest 80th Street, Inglewood, California, în care familia mea și cu mine locuiam de mai multe luni, avea numărul 3 121. Ca urmare, într-o seară, i-am întreținut pe prietenii noștri cei mai învățați cu un ciclu de enigme și jocuri matematice, fiecare organizat într-o altă cameră și vizitat prin rotație de grupuri de cîte patru musafiri.

Problema nucilor de cocos era expusă deasupra porții, pe o tablă așezată chiar dedesubtul numărului luminat al casei, dezvăluind în mod bătător la ochi secretul, dar nimeni nu și-a dat seama!

Problema mai simplă cu cei trei marinari de la sfîrșitul capitolului are soluția: 15 nuci de cocos. Dacă ați încercat s-o rezolvați rupînd chibriturile în două pentru a reprezenta jumătățile de nuci de cocos, ați ajuns, probabil, la concluzia că problema nu are soluție. Firește că nu trebuie înjumătățită nici o nucă de cocos pentru a efectua operațiile cerute.

Cînd tînărul Teseu a intrat în labirintul cretan de la Cnossos, în căutarea teribilului Minotaur, el a desfăşurat un fir de mătase, pe care i-l dăduse Ariadna, şi a putut găsi astfel drumul spre ieşire. Labirinturi de acest fel — construcţii cu culoare încurcate, menite să rătăcească pe neiniţiaţi, făcute de arhitecţi — erau destul de frecvente în antichitate. Herodot ne descrie un labirint din Egiptul antic care cuprindea 3 000 de încăperi. Monedele din Cnossos aveau ca emblemă un labirint simplu, iar modele de labirinturi mai complicate au apărut în mozaicurile romane şi pe togele primilor împăraţi romani. În tot evul mediu, zidurile şi pardoselile multor catedrale din Europa continentală erau decorate cu desene similare. În Anglia, cel mai faimos labirint arhitectural a fost conacul Rosamondei. După cum se povesteşte, acesta a fost construit într-un parc din Woodstock, în secolul al XII-lea, de către regele Henric al II-lea, care voia să-şi ascundă metresa, frumoasa Rosamond, de soţia sa, Eleanor de Aquitaine. Recurgînd la tehnica firului Ariadnei, spune legenda, Eleanor a găsit drumul spre centrul conacului unde a silit-o pe nefericita Rosamond să bea otravă. Legenda a captivat mai mulţi scriitori, îndeosebi pe Joseph Addison, care a scris o operă cu acest subiect, şi pe Algernon Charles Swinburne, al cărui poem dramatic *Rosamond* este, poate, cea mai emoţionantă versiune literară a subiectului.

Este curios, dar obiceiul continental de a decora interiorul catedralelor cu mozaicuri în formă de labirint, nu a fost adoptat în Anglia. În schimb, o practică engleză des folosită era de a face labirinturi pe pajiştea din faţa bisericii, iar acestea erau parcurse în cadrul ritualului religios. Aceste „graţioase labirinturi în verdele capricios", cum le-a denumit Shakespeare, au înflorit în Anglia pînă în secolul al XVIII-lea. Labirinturi de grădină, făcute din tufişuri înalte, numai ca amuzament, au ajuns la modă pe vremea Renaşterii tîrzii. În Anglia, cel mai celebru labirint din gar-

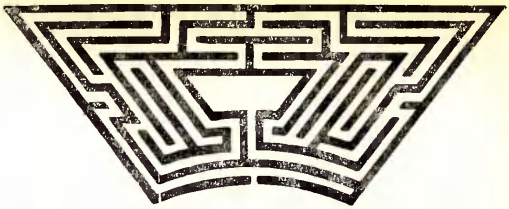


Fig. 140 Planul labirintului din garduri vii de la Hampton Court.

duri vii, prin care se rătăcesc și astăzi turiștii mai distrați, a fost proiectat în 1690, pentru palatul Hampton Court al lui William de Orania. Planul actual al labirintului este reprodus în fig. 140.

Singurul labirint de tufișuri cu valoare istorică, din Statele Unite, a fost construit pe la începutul secolului al XIX-lea, de către harmoniști, o sectă protestantă germană, care își avea sediul la Harmony, Indiana. (Orașul se cheamă astăzi New Harmony, nume care i-a fost dat în 1826 de socialistul scoțian Robert Owen, care a stabilit aici o colonie.) Ca și cele din bisericile medievale, labirintul din Harmony simboliza zvîrcolirile ca de șarpe ale păcatului și dificultatea de a merge mereu pe drumul cel bun. Labirintul a fost restaurat în 1941. Din nefericire, nu s-a păstrat nimic despre planul original, astfel că restaurarea s-a făcut după o schemă cu totul nouă.

Din punct de vedere matematic, un labirint este o problemă de topologie. Dacă desenăm planul pe o foaie de cauciuc, drumul corect de la intrare pînă la țintă este un invariant topologic, care rămîne corect oricum am deforma cauciucul. Puteți rezolva repede un labirint pe hîrtie, hașurînd toate aleile „oarbe", pînă cînd rămîn numai drumurile directe. Dar, dacă vă aflați, ca regina Eleanor, în fața sarcinii de a vă croi drum printr-un labirint a cărui hartă nu o aveți, situația se schimbă. Dacă labirintul are o singură intrare și trebuie să vă găsiți drumul spre singura lui ieșire, problema se poate rezolva totdeauna, punînd mîna pe peretele din dreapta sau din stînga și ținînd-o acolo în tot lungul drumului. Aveți certitudinea de a ajunge la ieșire, deși parcursul dv. nu va fi, probabil, cel mai scurt. Acest procedeu operează și în labirin-

turi mai tradiționale, în care ținta se află în interior, cu condiția să nu existe o rută pe care să puteți ocoli ținta și reveni apoi la punctul de intrare. Dacă ținta este înconjurată de unul sau mai multe circuite închise de acest fel, metoda mîinii pe perete vă duce, pur și simplu, în lungul celui mai larg circuit și înapoi la ieșirea labirintului: ea nu vă poate conduce niciodată la „insula" din interiorul circuitului.

Labirinturi care nu conțin circuite închise, cum este cel desenat în fig. 141 stînga, sînt denumite de topologi „simplu conexe". Este totuna cu a spune că labirintul nu are pereți detașați. Labirinturile cu pereți detașați conțin sigur circuite închise și se numesc „multiplu conexe" (un exemplu este dat în desenul din dreapta). Tehnica mîinii pe perete, aplicată în labirinturile simplu conexe, vă va duce o singură dată după fiecare direcție în lungul fiecărui drum, deci aveți certitudinea că, undeva pe traseu, veți ajunge la țintă. Labirintul de la Hampton Court este multiplu conex, însă cele două bucle închise ale sale nu înconjoară ținta. De aceea, tehnica mîinii pe perete vă va duce la țintă și înapoi, dar un coridor va fi total evitat.

Există oare un procedeu mecanic — un algoritm, cum spun matematicienii — care să rezolve toate labirinturile, inclusiv pe cele multiplu conexe cu bucle închise care înconjoară ținta? Există, iar cea mai bună formulare a lui este dată de Edouard Lucas, în *Récréations mathématiques* (vol. I, 1882), unde este atribuit lui M.Trémaux. Pe cînd umblați prin labirint, trageți o linie de o parte a drumului, să zicem în dreapta. Cînd ajungeți la o nouă întîlnire de drumuri, alegeți-l pe care vreți. Dacă, mergînd în lungul

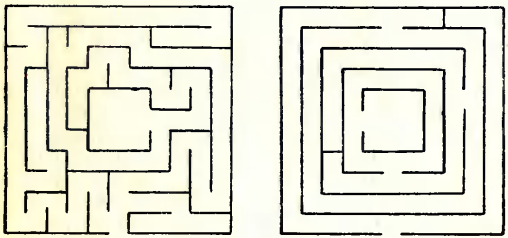


Fig. 141 Un labirint „simplu conex" (*stînga*) și unul „multiplu conex" (*dreapta*).

unui drum nou, reveniți la un punct de întîlnire vizitat anterior, sau la un capăt mort, întoarceți-vă și luați-o înapoi pe drumul pe care ați venit. Dacă, mergînd în lungul unui drum vechi (marcat la stînga), ajungeți la o intersecție vizitată anterior, luați orice drum nou dacă există vreunul; dacă nu, porniți pe un drum vechi. Nu vă angajați niciodată pe un drum marcat de ambele părți.

Desenul din fig. 141 dreapta reprezintă un labirint multiplu conex, în care două circuite închise înconjoară celula centrală. Dacă cititorul vrea să aplice algoritmul lui Trémaux, utilizînd un creion roșu pentru a-și însemna drumul, el va constata că acesta îl duce în adevăr spre centru și înapoi la intrare, după ce va fi parcurs de două ori (cîte o dată în fiecare sens) fiecare porțiune a labirintului. Și mai bine, dacă încetați să marcați drumul după ce ați ajuns la țintă, veți avea automat un parcurs direct de la intrare la țintă. Nu aveți decît să urmați drumul marcat cu o singură linie.

Pentru cititorii care și-ar da osteneala să verifice această tehnică la un labirint mai complicat, fig. 142 prezintă planul unui labirint multiplu conex, trasat de matematicianul englez W. W. Rouse Ball în grădina sa. Ținta este punctul din interior.

Adulții de astăzi nu se mai distrează cu astfel de enigme, dar există două domenii ale științei în care labirinturile își păstrează cel mai înalt interes: psihologia și proiectarea mașinilor de calcul. Psihologii au folosit în mod natural labirinturile, timp de decenii, pentru a cerceta comportamentul la învățare al oamenilor și al animalelor. Pînă și modesta rîmă poate fi învățată să parcurgă un labirint cu o bifurcație, iar furnica poate învăța să se orienteze în labirinturi care au cam 10 puncte de alegere. Pentru proiectanții de calculatoare, roboții care parcurg labirinturi reprezintă o parte dintr-un captivant program de construire a unor mașini care, asemenea animalelor, trag învățăminte din experiența lor. Unul dintre primele dispozitive pitorești de acest fel este Teseu, celebrul șoarece robot care se descurcă într-un labirint, inventat de Claude E. Shannon, care lucrează actualmente la Institutul tehnologic din Massachusetts. (Teseu este o perfecționare a „degetului" rezolvitor de labirinturi, construit anterior de Shannon.) „Șoarecele" își croiește întîi un drum sistematic printr-un labirint necunoscut, care poate fi și multiplu conex, utilizînd o variantă a algoritmului lui Trémaux. Cînd ajunge la un punct unde trebuie să facă o alegere, șoarecele nu procedează la întîmplare, cum ar face un om, ci apucă totdeauna pe drumul cel mai apropiat dintr-o anumită parte.

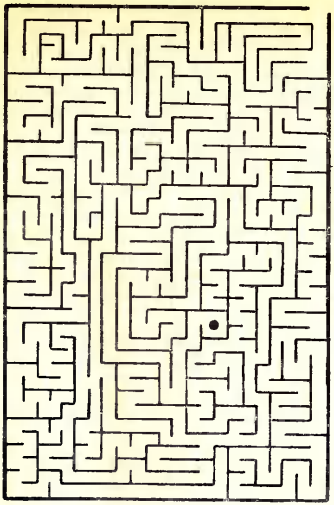


Fig. 142 Labirintul din grădina lui W.W. Rouse Ball.

„Este destul de dificil să înlăturăm perturbațiile la mașinile care conțin elemente aleatorii, explică Shannon. Este greu să spunem cînd o astfel de mașină se comportă greșit, dacă nu putem prevedea ce are ea de făcut!"

O dată ce șoarecele și-a găsit drumul spre țintă, circuitele de memorie îi permit să parcurgă a doua oară labirintul, fără nici o eroare. În termenii sistemului lui Trémaux, aceasta înseamnă că șoarecele evită toate cărările traversate de două ori și urmează numai pe cele pe care a mers o dată. Aceasta nu garantează că el va lua drumul cel mai scurt spre țintă, ci numai că el va ajunge la țintă fără să se angajeze în vreo alee blocată. Un șoarece viu învață mult mai greu configurația unui labirint, deoarece tehnica lui de explorare este în mare măsură (dar nu în întregime) formată din probe și erori întîmplătoare, care au nevoie de mai multe reușite înainte ca drumul corect să fie memorat.

S-au construit și alți raboți care parcurg labirinturi. Cel mai complicat, conceput de Jaroslav A. Deutsch, de la Universitatea din Oxford, este capabil să-și transfere ceea ce a „învățat" de la un labirint la un altul topologic echivalent, chiar dacă lungimile și formele au fost modificate. Parcurgătorul de labirint al lui Deutsch profită și de drumurile mai scurte, adăugate la labirint, și face multe alte lucruri surprinzătoare.

Aceste dispozitive sînt, cu siguranță, doar începuturi. După toate probabilitățile, viitoarele mașini care pot învăța vor dobîndi puteri imense și vor juca un rol de nebănuit în cadrul mașinilor automate ale erei spațiului cosmic. Labirint și zbor cosmic — această combinație ne readuce la mitul elin, menționat la începutul capitolului. Labirintul Minotaurului a fost construit pentru regele Minos, de către Dedal, care a inventat o pereche de aripi mecanice și al cărui fiu și-a găsit moartea pentru că a zburat prea aproape de Soare. „Un labirint inventat cu atîta șiretenie nu s-a mai văzut niciodată în lume, nici înainte, nici de atunci, scrie Nathaniel Hawthorne, relatînd legenda, în *Tanglewood Tales*. Nimic nu poate fi atît de complicat, cu excepția doar a creierului unui om ca Dedal, care l-a conceput, sau sufletul oricărui om obișnuit..."

Capitolul 11 LOGICĂ RECREATIVĂ

„De cîte ori ți-am spus că, după ce ai eliminat imposibilul, ceea ce rămîne, oricît ar fi de improbabil, trebuie să fie adevărul?"

Sherlock Holmes, *The Sign of Four*

O problemă logică este, de obicei, o enigmă care cere un raționament deductiv și în care calculele numerice intervin puțin sau chiar de loc. Firește, astfel de probleme sînt matematice în sensul că logica poate fi considerată ca o matematică de bază, extrem de generală; totuși, este convenabil să facem distincție între enigmele logice și rudele lor numerice, mai numeroase. Aici ne vom ocupa de trei tipuri celebre de probleme de logică recreativă și vom discuta modul în care pot fi rezolvate.

Autorii de jocuri și enigme matematice denumesc cîteodată tipul cel mai frecvent problema „Smith — Jones — Robinson", după o enigmă mai veche, concepută de enigmistul englez Henry Dudeney (problema 49 din cartea sa *Puzzles and Curious Problems*). Ea constă dintr-un șir de premise, referitoare, de obicei, la indivizi, pe baza cărora se cere să facem anumite deducții. O variantă americană recentă a problemei lui Dudeney se prezintă astfel:

1. Smith, Jones și Robinson sînt mecanicul, frînarul și fochistul unui tren, într-o ordine oarecare. În tren sînt trei călători cu aceleași trei nume de familie, care pot fi identificați în premisele ce urmează prin prescurtarea „Dl".
2. Dl. Robinson locuiește la Los Angeles.
3. Frînarul locuiește în Omaha.
4. Dl. Jones a uitat de mult algebra pe care a învățat-o la liceu.
5. Călătorul cu același nume, ca și frînarul, trăiește la Chicago.

6. Frînarul și unul dintre călători, distins specialist în fizica matematică, țin de aceeași biserică.

7. Smith îl bate pe fochist la biliard.

Care este mecanicul?

Avem posibilitatea de a traduce problema în notația logicii simbolice și de a o rezolva prin tehnici adecvate, dar procedeul ar fi inutil de greoi. Pe de altă parte, este greu să prindem structura logică a problemei, fără a recurge la ajutorul unor notații. Metoda cea mai convenabilă este o matrice cu celule goale pentru toate împerechierile posibile ale elementelor din fiecare mulțime. În cazul de față, avem două mulțimi, deci ne trebuie două matrici (fig. 143).

Fiecare celulă trebuie marcată cu „1", pentru a arăta că combinația este validă, sau cu „0", pentru a arăta că ea nu concordă cu premisele. Să vedem cum se lucrează. Premisa 7 elimină, evident, posibilitatea ca Smith să fie fochistul, deci scriem „0", în colțul din dreapta sus al matricei din stînga. Premisa 2 ne spune că Dl. Robinson trăiește la Los Angeles, deci scriem „1" în colțul din stînga jos al matricei din dreapta și zerouri în celelalte celule ale aceleiași linii și ale aceleiași coloane, pentru a arăta că dl. Robinson nu locuiește în Omaha sau la Chicago și că dl. Smith și dl. Jones nu locuiesc la Los Angeles.

Acum trebuie să ne gîndim puțin. Premisele 3 și 6 ne informează că fizicianul este din Omaha, dar cum îl cheamă? El nu poate fi Dl.Robinson, nici Dl.Jones (care a uitat cu totul algebra), deci

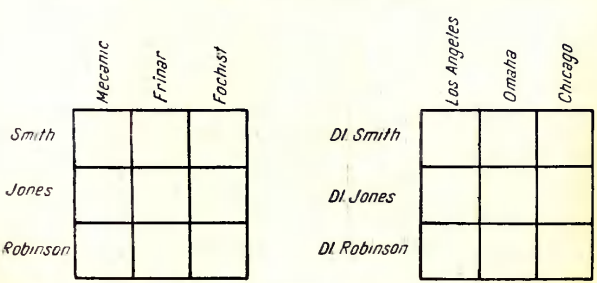


Fig. 143 Cele două matrici pentru problema „Smith — Jones — Robinson".

el nu poate fi decît Dl.Smith. Indicăm aceasta printr-un „1" în celula din mijloc a liniei întîi la matricea din dreapta și prin zerouri în restul de celule goale ale aceleiași linii și ale aceleiași coloane. Numai o singură celulă a matricei mai este acum disponibilă pentru al treilea „1", atestînd că Dl.Jones este din Chicago. Acum, premisa 5 ne permite să identificăm pe frînar ca fiind Jones, deci punem „1" în celula din mijloc a matricei din stînga și zerouri în celelalte celule ale aceleiași linii și ale aceleiași coloane. Figura 144 ne arată cum se prezintă în acest moment matricea noastră.

Restul deducțiilor este evident. Numai celula de jos din coloana fochistului este liberă pentru un „1". Aceasta înseamnă să scriem „0" în colțul din stînga jos, lăsînd liber numai colțul din stînga sus pentru ultimul „1", care dovedește că mecanicul este Smith.

Lewis Carroll inventa cu plăcere probleme curioase și imens de complicate de acest gen. Opt dintre ele se găsesc în anexa cărții sale *Symbolic Logic*. O problemă monstruoasă a lui Carroll (care cuprinde 13 variabile și 12 premise, din care trebuie să deducem că nici un magistrat nu prizează tabac) a fost introdusă într-un calculator IBM 704 de către John G.Kemeny, decanul Facultății de matematică de la Dartmouth College. Mașina a soluționat problema în vreo 4 min, deși tipărirea completă a „tabelei de adevăr" (o matrice care arată validitatea sau invaliditatea oricărei combinații posibile de valori adevărate și false pentru variabile) a problemei ar fi necesitat 13 ore! Pentru cititorii care ar vrea să-și

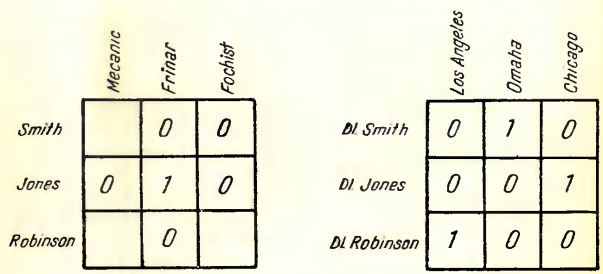


Fig. 144 Utilizarea matricei.

încerce norocul cu o problemă Smith-Jones-Robinson mai dificilă, dăm aici una nouă, concepută de Raymond Smullyan, de la Facultatea de matematică a Universității Princeton.

1. În 1918, în ziua încheierii armistițiului primului război mondial, trei perechi de tineri căsătoriți au cinat împreună.

2. Fiecare soț este fratele uneia dintre soții, iar fiecare soție este sora unuia dintre soți; adică avem un grup din trei perechi frate-soră.

3. Helen este exact cu 26 de săptămîni mai în vîrstă decît soțul ei, care s-a născut în august.

4. Sora d-lui White este căsătorită cu cumnatul fratelui lui Helen. Ea (sora d-lui White) s-a căsătorit cu el tocmai în ziua ei de naștere, care cade în ianuarie.

5. Marguerite White nu este atît de înaltă ca William Black.

6. Sora lui Arthur este mai drăguță decît Beatrice.

7. John are 50 de ani.

Care este prenumele doamnei Brown?

Un alt tip de problemă logică, cunoscut sub denumirea de varianta „pălăriei colorate", este ilustrat de următorul exemplu. Trei bărbați — *A*, *B* și *C* — sînt legați la ochi și li se spune că fiecăruia dintre ei i se va pune o pălărie roșie sau una verde. După ce s-a întîmplat aceasta, li se iau legăturile de la ochi și li se cere să ridice mîna dacă văd o pălărie roșie și să părăsească încăperea de îndată ce vor fi siguri de culoarea pălăriei lor. Toate trei pălăriile sînt roșii, deci toți trei ridică mîna. Trec cîteva minute, pînă cînd *C*, care este mai inteligent decît ceilalți, părăsește camera. Cum a dedus el culoarea pălăriei sale?

C își pune întrebarea: Poate pălăria mea să fie verde? Dacă da, atunci *A* ar ști imediat că are o pălărie roșie, căci numai o pălărie roșie pe capul lui îl putea face pe *B* să ridice mîna. Deci, *A* va părăsi camera. *B* va raționa la fel și va ieși de asemenea. Deoarece ambii au rămas pe loc, *C* conchide că pălăria sa trebuie să fie roșie.

După cum relevă George Gamow și Marvin Stern, în delicioasa lor cărțulie *Enigme matematice* (trad. din l. engleză, Editura Științifică, București, 1961), aceasta se poate generaliza pentru orice număr de oameni cărora li s-au dat pălării roșii. Să presupunem că mai este și un al patrulea, *D*, care este mai inteligent decît *C*. El raționează că, dacă pălăria sa ar fi verde, atunci *A*, *B* și *C* sînt într-o situație identică cu cea descrisă mai sus. După cîteva minute,

cel mai ingenios membru al trioului va părăsi cu siguranță camera. Dar după ce trec 5 min și toți rămîn pe loc, *D* poate deduce că pălăria sa este roșie. Dacă există un al cincilea, mai inteligent decît *D*, el va decide că pălăria sa este roșie după un interval de, să zicem, 10 min. Bineînțeles, toate acestea sînt atenuate prin ipoteza diverselor nivele de inteligență și prin evazivitatea lungimii intervalelor de timp.

Mai puțin ambigue sînt alte probleme de pălării colorate, ca următoarea, inventată tot de Smullyan. Trei oameni — *A*, *B* și *C* — își dau seama că toți trei sînt „logicieni desăvîrșiți", care pot deduce instantaneu toate consecințele unei mulțimi de premise date. Au la dispoziție patru timbre roșii și patru verzi. Li se leagă ochii și pe fruntea fiecăruia se lipesc cîte două timbre. Apoi li se iau legăturile de la ochi. *A*, *B* și *C* sînt întrebați, unul după altul: „Știți ce culoare au timbrele dv.?" Fiecare răspunde: „nu". Atunci *A* este întrebat din nou. El răspunde iarăși „nu". Acum i se pune întrebarea lui *B*, care răspunde: „da". Care sînt culorile timbrelor lui *B*?

A treia clasă de enigme logice foarte răspîndite se ocupă cu adevărul și minciuna. Exemplul clasic vorbește despre un explorator aflat într-o regiune locuită de două triburi: membrii unuia mint totdeauna, membrii celuilalt spun totdeauna adevărul. El întîlnește doi indigeni. „Ești unul dintre cei care spun adevărul?" îl întreabă el pe băștinașul mai înalt. Acesta răspunde: „*Goom*". „El spune: «da»", explică indigenul mai scund, care știe englezește, „dar este un mare mincinos". Cărui trib aparține fiecare dintre ei? O abordare sistematică ar consta în a nota cele patru posibilități — *AA*, *AM*, *MA*, *MM* — și de a elimina perechile incompatibile cu premisele. Obținem o soluție mai rapidă, dacă ne dăm seama că indigenul cel înalt trebuie să răspundă „da", indiferent dacă e mincinos sau spune adevărul. Dacă indigenul cel scund spune adevărul, înseamnă că tovarășul său este un mincinos.

Cea mai notorie problemă de acest tip, complicată prin factori de probabilitate și prin obscuritate semantică, a fost inserată de astronomul englez Arthur Eddington în capitolul 6 al cărții sale *New Pathways in Science*. „Dacă *A*, *B*, *C*, *D* spun fiecare adevărul o dată la trei afirmații (în mod independent), iar *A* afirmă că *B* neagă că *C* declară că *D* este un mincinos, care este probabilitatea ca *D* să spună adevărul?"

Răspunsul lui Eddington, 25/71, a fost întîmpinat cu un val de proteste din partea cititorilor săi, stîrnind o controversă nostimă și plină de confuzii, care nu s-a rezolvat niciodată definitiv. Recenzînd cartea lui Eddington în revista „Nature" (23 martie, 1935), astronomul englez Herbert Dingle a respins problema ca fiind lipsită de înțeles și simptomatică pentru gîndirea confuză a lui Eddington în domeniul probabilităților. Fizicianul american Theodore Sterne a replicat („Nature", 29 iunie, 1935) că problema nu era fără înțeles, dar nu cuprindea suficiente date pentru o soluție.

Dingle a răspuns („Nature", 14 septembrie, 1935), susținînd că dacă ne luăm după abordarea lui Sterne, ar fi suficiente date pentru a obține o soluție de exact 1/3. Eddington a reintrat atunci în arenă, cu un articol intitulat „Problema lui A,B,C și D" („The Mathematical Gazette", octombrie, 1935), în care explica amănunțit cum își calculase rezultatul. Controversa s-a terminat prin alte două articole din aceeași revistă („The Mathematical Gazette", decembrie, 1936), dintre care unul îl apără pe Eddington, iar celălalt lua o poziție diferită de toate celelalte.

Dificultatea constă, în principal, în a hotărî exact cum anume trebuie interpretat enunțul problemei la Eddington. Dacă B spune adevărul prin negația sa, avem justificarea de a presupune că C a spus că D spunea adevărul? Eddington credea că nu. De asemenea, dacă A minte, putem fi siguri că B și C au spus în general ceva? Din fericire, putem înlătura toate aceste dificultăți verbale, făcînd următoarele ipoteze (ceea ce Eddington nu a făcut):

1. Toți cei patru oameni au făcut afirmații.

2. A,B și C au făcut fiecare cîte o afirmație, care întărea sau nega afirmația următoare.

3. Afirmația mincinoasă este luată ca o negație, iar o negație mincinoasă, ca o afirmație.

Oamenii mint la întîmplare, spunînd fiecare cîte două minciuni la fiecare trei afirmații. Dacă reprezentăm afirmația adevărată a fiecăruia prin A și cele două minciuni prin $M1$ și prin $M2$, putem construi o tabelă cu 81 de combinații diferite din A și M pentru cei patru oameni. Trebuie să hotărîm apoi care dintre aceste combinații devine imposibilă în virtutea structurii logice a afirmației. Numărul de combinații posibile care se termină cu A (adică se termină cu o afirmație adevărată pentru D), împărțit prin numărul total de combinații posibile, ne va da atunci răspunsul.

Cînd am dat problema cu exploratorul și cei doi indigeni, trebuia să o formulez mai precis, spunînd că exploratorul își dădea seama că „*Goom*" este un cuvînt din limba indigenilor care înseamnă da sau nu, fără să știe însă care anume. Aceasta ar fi prevenit un număr de scrisori, ca următoarea, trimisă de la John A. Jonelis din Indianopolis:

Domnilor,

Mi-a plăcut articolul despre enigmele logice... Dorind să împart această plăcere cu soția mea și, probabil, să-mi pun în evidență prestigiul meu de bărbat, am sîcîit-o cu problema mincinosului și a celui ce spune adevărul. În mai puțin de 2 min, mi-a dat un răspuns pe deplin justificat și diametral opus celui publicat de dv.

Indigenul cel înalt pare să nu știe nici o boabă englezește, căci, altfel, el ar fi capabil să răspundă da sau nu în englezește. De aceea, spunînd „Goom", aceasta însemna ceva în genul lui „Nu înțeleg" sau „Bine ați venit în țara Bongo Bongo". În consecință, băștinașul cel scund mințea spunînd că tovarășul său răspunsese da și, fiind mincinos, mințea susținînd că tovarășul său este mincinos. De aceea, indigenul cel înalt spunea adevărul.

Această logică feminină a dat peste cap prestigiul meu de bărbat. L-a dezumflat oare un pic și pe al dv.?

RĂSPUNSURI

Prima problemă logică se soluționează cel mai bine prin trei matrici: prima pentru combinații ale prenumelor și ale numelor soțiilor, una pentru prenumele și numele soților și una pentru relațiile rudeniei de sînge. Dat fiind că prenumele doamnei White este Marguerite (premisa 5), avem numai două alternative pentru prenumele celorlalte două soții: (1) Helen Black și Beatrice Brown sau (2) Helen Brown și Beatrice Black.

Să admitem a doua alternativă. Sora lui White trebuie să fie sau Helen sau Beatrice. Ea nu poate fi Beatrice, deoarece fratele

lui Helen ar fi atunci Black; cei doi cumnați ai lui Black ar fi atunci White (fratele soției sale) și Brown (soțul surorii sale); însă Beatrice Black nu este măritată cu nici unul dintre ei, fapt incompatibil cu premisa 4. Deci sora lui White trebuie să fie Helen. Aceasta ne permite, la rîndul său, să deducem că sora lui Brown este Beatrice, iar sora lui Black, Marguerite.

Premisa 6 ne conduce la concluzia că prenumele d-lui White este Arthur (Arthur Brown se elimină, deoarece aceasta ar face ca Beatrice să fie mai drăguță decît ea însăși, iar Arthur Black se elimină pentru că știm, din premisa 5, că prenumele lui Black este William). De aceea, prenumele lui Brown trebuie să fie John. Din nefericire, premisa 7 ne informează că John s-a născut în 1868 (50 de ani înaintea armistițiului), care este un an bisect. Aceasta ar face-o pe Helen mai în vîrstă cu o zi în plus decît cele 26 de săptămîni specificate în premisa 3. (Premisa 4 ne spune că ziua ei de naștere este în ianuarie, iar premisa 3, că ziua de naștere a soțului este în august. Ea poate fi exact cu 26 de săptămîni mai în vîrstă numai dacă ziua ei de naștere este 31 ianuarie, a lui este 1 august, și 29 februarie nu intervine aici!) Aceasta elimină a doua dintre cele două alternative cu care am pornit, determinîndu-ne să concludem că soțiile sînt Marguerite White, Helen Black și Beatrice Brown. Nu sînt incompatibilități, căci nu cunoaștem anul nașterii lui Black. Premisele ne permit să deducem că Marguerite este sora lui Brown, Beatrice sora lui Black și Helen a lui White, dar lasă nedecise prenumele lui White și al lui Brown.

În problema cu timbrele poștale pe frunte, *B* are trei posibilități: timbrele sale sînt (1) roșu-roșu, (2) verde-verde sau (3) roșu-verde. Să presupunem că sînt roșu-roșu.

După ce toți trei au răspuns o dată, *A* poate raționa astfel: „Nu pot avea roșu-roșu (deoarece atunci *C* ar vedea 4 timbre roșii și ar ști imediat că are verde-verde, iar dacă *C* are verde-verde, *B* ar vedea 4 timbre verzi și ar ști că are roșu-roșu). De aceea, trebuie să am roșu-verde".

Dar *A* a fost întrebat a doua oară, și tot n-a știut culoarea timbrelor sale. Aceasta îi permite lui *B* să elimine posibilitatea ca timbrele sale să fie roșu-roșu. Exact același argument îi permite lui *B* să respingă posibilitatea ca timbrele sale să fie verde-verde. Îi rămîne astfel numai a treia alternativă: roșu-verde.

O duzină de cititori au arătat curînd că există o cale rapidă de a rezolva problema, fără a ne da osteneala să analizăm vreuna dintre

întrebări și răspunsuri! Brockway McMillan, din Summit, New Jersey, a exprimat aceasta după cum urmează:

„Enunțul problemei este perfect simetric față de timbrele roșii și cele verzi. De aceea, orice distribuție a timbrelor pe frunți, care satisface condițiile enunțate, va deveni din nou o distribuție satisfăcînd condițiile, dacă schimbăm între ele roșu și verde. De aceea, dacă soluția este unică, ea trebuie să fie invariantă față de schimbarea dintre roșu și verde. Singura soluție de acest fel este că B are un timbru roșu și unul verde".

După cum a spus Wallace Manheimer, decanul secției de matematică al unei școli superioare din Brooklyn, această abordare mai scurtă nu este bazată pe faptul că A,B și C ar fi logicieni desăvîrșiți, cum susține problema, ci pe faptul că Raymond Smullyan este un logician desăvîrșit!

Răspunsul la problema lui Eddington cu cei patru oameni este probabilitatea 13/41 că D spune adevărul. Toate combinațiile dintre adevăr și minciună care au un număr impar de minciuni (sau de adevăruri) se dovedesc incompatibile cu enunțul lui Eddington. Aceasta elimină din tabela celor 81 de combinații posibile pe toate, în afară de 41 dintre care 13 se termină printr-o aserțiune adevărată a lui D. Deoarece fiecare dintre ceilalți trei spune adevărul în exact același număr de combinații valide, probabilitatea de a fi spus adevărul este aceeași pentru toți patru.

Folosind simbolul echivalenței ($\equiv$), care înseamnă că enunțurile legate prin acest simbol sînt ambele fie adevărate, fie false, și simbolul negației ($\sim$), putem scrie problema lui Eddington după cum urmează, în calculul propozițional al logicii simbolice:

$$A \equiv \Big(B \equiv \sim (C \equiv \sim D)\Big).$$

Aceasta se poate simplifica:

$$A \equiv \Big(B \equiv (C \equiv D)\Big).$$

Tabelul de adevăr pentru această expresie va confirma rezultatele analizei de mai sus.

Capitolul 12 PĂTRATE MAGICE

Pătratul magic tradițional este o mulțime de întregi, în ordine naturală, începînd cu 1, așezați într-o formă pătrată, astfel încît fiecare linie, coloană și diagonală principală să aibă aceeași sumă. Pentru a avea o idee asupra amplorii fantastice la care a ajuns analiza acestui subiect destul de ușuratic, vom spune că, în 1838, cînd oamenii cunoșteau despre pătratele magice mult mai puțin decît se știe astăzi, s-a publicat în acest domeniu o lucrare franceză în trei volume. Din timpurile cele mai vechi și pînă în prezent, studiul pătratelor magice s-a dezvoltat, ca un fel de cult, adesea cu tendințe oculte, ai cărui inițiați se înșiruie de la matematicieni eminenți ca Arthur Cayley sau Oswald Veblen pînă la oameni de talia lui Benjamin Franklin.

„Ordinul" unui pătrat magic este numărul de celule de pe o latură. Nu există pătrate magice de ordinul 2 și numai unul singur (abstracție făcînd de rotații și de reflexii) de ordinul 3. O metodă ușoară de a ține minte acest pătrat este următoarea: Scrieți întîi cifrele în ordinea arătată în fig. 145 stînga, apoi mutați fiecare cifră din vîrf de partea cealaltă a cifrei centrale, cum indică săgețile. Rezultatul este pătratul magic din dreapta, a cărui constantă este 15. (Constanta este totdeauna semisuma lui n^3 cu n, unde n este ordinul.) În China, unde acest pătrat este denumit *lo-shu*, el are o istorie lungă în calitate de amuletă. Îl mai găsim și astăzi pe amulete care se poartă în Extremul Orient și în India, iar pe multe pachebоturi mari, el formează schema pentru jocuri cu zaruri pe o astfel de tablă.

Pătratele magice cresc repede în complexitate, dacă trecem la ordinul 4. Există exact 880 de tipuri diferite (făcînd abstracție de rotații și oglindiri), dintre care multe sînt incomparabil mai magice decît cere definiția unui pătrat magic. O specie interesantă,

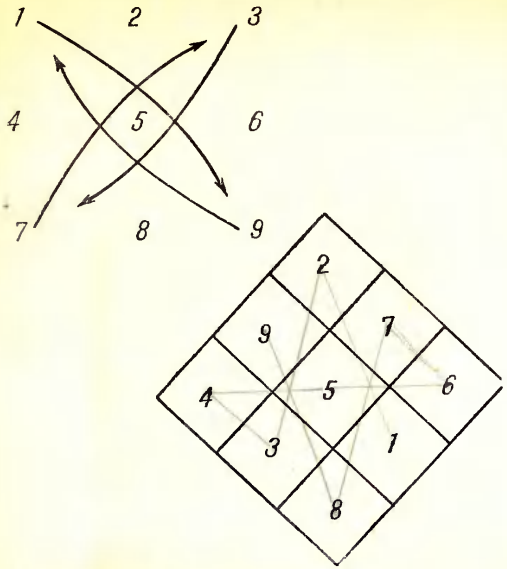


Fig. 145 Cum poate fi format pătratul magic *lo-shu*.

cunoscută sub numele de pătrat simetric, apare în celebra gravură *Melancolia* a lui Albrecht Dürer (fig. 146).

Dürer nu a explicat niciodată bogatul simbolism al acestei capodopere, dar multe somități sînt de acord că ea reprezintă tristețea gînditorului incapabil de a porni la acțiune. În timpul Renașterii, se credea că temperamentul melancolic este caracteristic geniului creator: aceasta era supărarea învățaților, „îmbolnăviți de pecetea palidă a gîndirii". (Această idee că un intelect strălucit este incapabil, asemenea lui Hamlet, să ia o hotărîre, s-a păstrat pînă astăzi.)

Fig 146 *Melancolia* lui Albrecht Dürer. Pătratul magic este în dreapta sus.

În gravura lui Dürer, instrumente neobișnuite — științifice și de tîmplărie —sînt risipite dezordonat în jurul figurii gînditoare și despletite a Melancoliei. În talerele balanței nu este nimic, nimeni nu urcă pe scară, cîinele adormit este pe jumătate mort de foame, îngerașul înaripat așteaptă să i se dicteze, iar timpul se scurge în ceasul cu nisip de deasupra. Sfera de lemn și tetraedrul de piatră, trunchiat într-un mod straniu, sugerează baza matematică a artelor construcției. În aparență, scena este inundată de lumina Lunii. Corcubeul lunar, care se arcuiește peste ceea ce pare să fie o cometă, poate reprezenta speranța că această stare de spirit sumbră este trecătoare.

Giorgio de Santillana, în cartea sa *The Age of Adventure*, vede în această stranie gravură „misterioasa pauză întrebătoare a gîndirii Renașterii în pragul centralei de forță pînă atunci doar visate a științei". James Thomson încheie marele său poem al pesimismului, *The City of Dreadful Night*, cu o măreață descriere, în 12 strofe, a acestei gravuri, în care vede o „confirmare a vechii deșerări".

„Ieșim din orice luptă zdrobiți, cu dorul frînt,
Destinului nu-i pasă că noi dorim izbîndă.
Oracolele-s mute, sau mint fără veșmînt,
Căci nu ne cunosc taina și n-au ce să ne vîndă.
Și nimeni nu pătruns-a prin vastul văl de vînt
Fiindcă lumina piere cînd pleci de pe pămînt.
Și totul e zadarnic, și totul e osîndă".*

Pătratele magice de ordinul 4 au fost puse, de astrologii Renașterii, în legătură cu Jupiter și se credea că ele combat melancolia (care ar fi fost de origine saturniană). Aceasta ar putea explica pătratul din colțul din dreapta sus al gravurii. El se numește simetric, deoarece fiecare număr, adunat cu simetricul său față de centrul pătratului, dă 17. În conformitate cu aceasta, există mai multe grupe de cîte 4 celule (în afară de linii, coloane și diagonalele principale) care totalizează constanta de ordinul patru, 34: de exemplu, cele patru celule din vîrfuri, cele patru celule din centru, pă-

* The sense that every struggle brings defeat /Because Fate holds no prize to crown success; /That all the oracles are dumb or cheat /Because they have no secret to express; /That none can pierce the vast black veil uncertain/ Because there is no light beyond the curtain; /That all is vanity and nothingness.

tratele de 2 × 2 de la fiecare vîrf. Un pătrat de acest tip poate fi construit printr-o metodă absurd de simplă. Scrieți, pur și simplu, pe o arie pătrată numerele 1 pînă la 16 și inversați apoi cele două diagonale principale. Rezultatul este un pătrat magic simetric. Dürer a schimbat între ele cele două coloane din mijloc la pătratul său (ceea ce nu-i afectează proprietățile), astfel încît cele două celule din mijloc jos indică anul cînd a creat gravura.

Cel mai vechi pătrat de ordinul 4 pe care-l cunoaștem, găsit într-o inscripție din secolul al XI-lea sau al XII-lea la Khajuraho, India, este redat în partea de sus a fig. 147. El aparține unui tip cunoscut sub numele de pătrate diabolice (numite uneori și „pandiagonale" sau „Nasik"), care sînt și mai uimitoare decît cele simetrice. Pe lîngă proprietățile obișnuite, pătratele diabolice sînt magice și în lungul tuturor „diagonalelor frînte". De exemplu, celulele 2,12,15 și 5, ca și celulele 2,3,15 și 14 sînt diagonale frînte, care pot fi reconstituite adăugînd două pătrate identice unul în lungul celuilalt. Un pătrat diabolic rămîne diabolic, dacă o linie este mutată de la partea de sus la bază sau invers, precum și dacă o coloană este trecută de la o margine la cealaltă. Dacă formăm un mozaic prin alăturarea unui mare număr de pătrate diabolice, căpătăm un cîmp în care orice grupă de 4 × 4 celule va fi diabolică. Orice grup de patru celule vecine ale cîmpului vor da constanta, de sus în jos, de la stînga la dreapta sau diagonal.

Poate că modul cel mai dramatic de a prezenta proprietățile diabolice ale unui astfel de pătrat este descris de matematicienii J.Barkley Rosser și Robert J.Walker, ambii de la Universitatea Cornell, într-un articol din 1938. Reunim, pur și simplu, marginile de sus și de jos ale pătratului, ca să obținem un cilindru, apoi întindem și încovoiem cilindrul, transformîndu-l într-un tor (fig. 147). Toate liniile, coloanele și diagonalele devin acum bucle închise. Dacă pornim acum din orice celulă și ne mișcăm cu două pătrate mai departe, în indiferent ce direcție în lungul unei diagonale, ajungem totdeauna la aceeași celulă. Această celulă se numește „antipodul" celulei cu care am început. Orice pereche de antipozi de pe acest tor diabolic va da suma 17. Orice buclă de patru celule, diagonal sau ortogonal, dă totalul 34, ca și orice grupă pătrată de patru celule.

Un pătrat diabolic rămîne diabolic față de cinci transformări: (1) rotație, (2) reflexie, (3) transferul unei linii din partea de sus în cea de jos, și invers, (4) transferul unei coloane de la o margine la

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

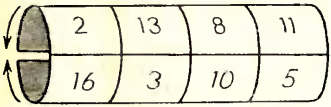
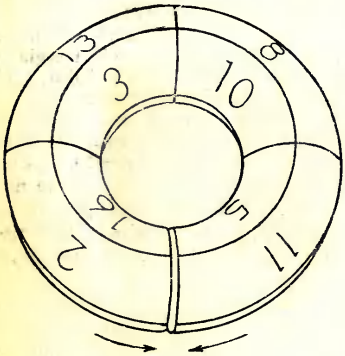


Fig. 147 Torul diabolic.



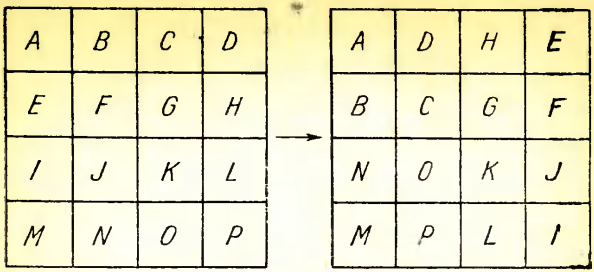


Fig. 148 Una dintre cele cinci transformări care nu distrug diabolismul unui pătrat diabolic.

cealaltă, (5) rearanjarea celulelor conform planului din fig.148. Combinînd aceste cinci transformări, putem obține 48 de tipuri de bază ale pătratelor diabolice (384 dacă ținem seama de rotații și oglindiri). Rosser și Walker arată că aceste cinci transformări constituie un grup (adică o structură abstractă cu proprietăți determinate), care este identic cu grupul transformărilor hipercubului (cubului cuadridimensional) în el însuși.

Înrudirea dintre pătratele diabolice și hipercub se vede ușor, dacă transferăm cele 16 celule ale unui astfel de pătrat în cele 16 vîrfuri ale hipercubului. Aceasta se poate arăta pe binecunoscuta proiecție bidimensională a hipercubului (fig.149). Suma celor patru vîrfuri ale fiecăreia dintre cele 24 de fețe ale hipercubului va fi 34. Perechile de antipozi, care dau suma 17, sînt diagonal opuse pe hipercub. Rotind și oglindind hipercubul, el poate fi așezat în exact 384 de poziții diferite, care se reaplică fiecare în plan ca unul din cele 384 de pătrate diabolice.

Claude Fayette Bragdon, un eminent arhitect și ocultist american, decedat în 1946, a fost fascinat de descoperirea sa că, la cele mai multe pătrate magice, o curbă dusă de la o celulă la alta, în ordinea naturală, va da un model cu efect artistic. Se pot obține alte modele, legînd între ele numai celulele impare sau numai cele pare. Bragdon a folosit „curbele magice" astfel obținute, ca bază pentru ornamente de textile, arhitecturale, sau pentru coperte

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

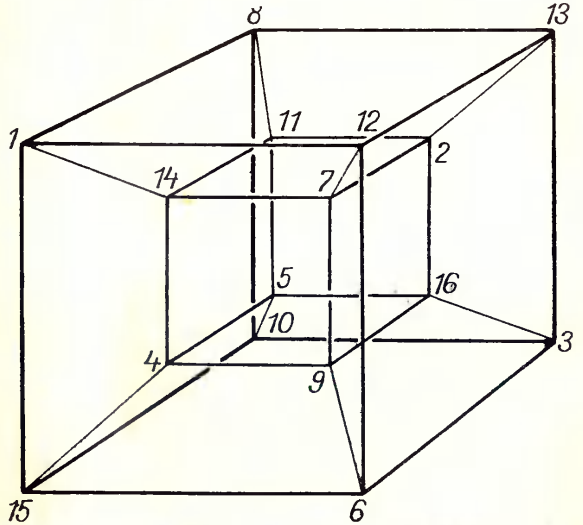


Fig. 149. Hipercub ‚diabolic şi unul dintre cele 384 de pătrate ‚diabolice ale sale.

de cărți, precum și drept frontispicii la autobiografia sa *More Lives Than One*. Desenul grătarului de ventilație din tavanul Camerei de comerț din Rochester, New York, orașul său, derivă din curba magică a pătratului *lo-shu*. Un exemplu tipic de curbă magică este reprodus în fig. 150, unde este desenată pe pătratul lui Dürer.

Una dintre marile probleme nerezolvate ale matematicii recreative constă în a găsi o metodă de a calcula numărul de pătrate diferite de un ordin dat. În prezent nu se cunoaște nici măcar numărul pătratelor de ordinul 5, care a fost însă estimat la peste 13 000 000.

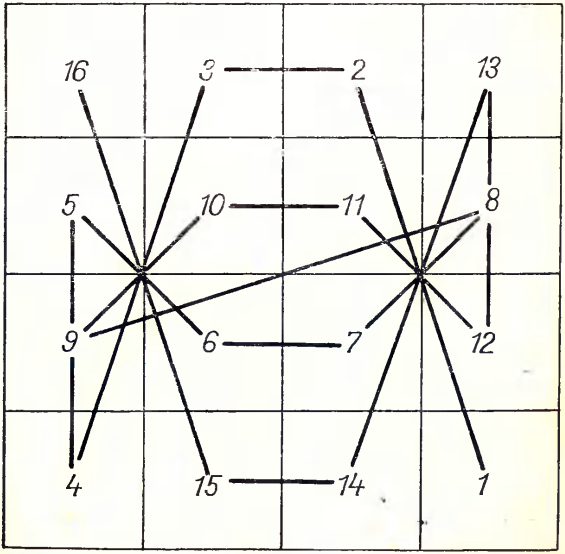


Fig. 150 „Curba magică" a pătratului lui Dürer.

În schimb, numărul pătratelor diabolice de ordinul 5 a fost stabilit de Rosser și Walker: 28 800 (inclusiv rotațiile și oglindirile). Pătratele diabolice sînt posibile în toate ordinele mai mari de 4, cu excepția celor divizibile prin 2, dar nu și prin 4. De exemplu, nu există nici unul de ordinul 6. Există, de asemenea, cuburi și hipercuburi diabolice, dar (cum au demonstrat Rosser și Walker în lucrări nepublicate) nu există cuburi de ordinele 3,5,7, $8k + 2$, $8k + 4$ sau $8k + 6$, unde k este un întreg arbitrar. În toate celelalte ordine, cuburile diabolice sînt posibile.

Capitolul 13 JAMES HUGH RILEY SHOWS, INC.

James Hugh Riley Shows, Inc. este una dintre cele mai mari întreprinderi de distracţii din Statele Unite. Cînd am auzit de deschiderea ei la marginea oraşului, m-am grăbit să mă duc să-l întîlnesc acolo pe vechiul meu prieten Jim Riley; fusesem colegi de an la Universitatea din Chicago, în urmă cu două decenii. Riley lucra atunci la lucrarea de diplomă în matematică, dar într-o vară el s-a angajat „conferenţiar" la o baracă ambulantă cu dansatoare şi, în anii următori, a rămas „în aceasta", cum spun uneori oamenii de circ. Toţi cei din întreprindere îl cunoşteau sub numele de Profesorul. Reuşise într-un fel să-şi păstreze vie pasiunea pentru matematică, şi ori de cîte ori ne întîlneam, el putea să-mi dea unele subiecte pentru rubrica mea.

L-am găsit pe Profesor flecărind cu casierul, în faţa expoziţiei de ciudăţenii. Purta o pălărie albă şi părea mai în vîrstă şi mai corpolent decît la ultima noastră întîlnire. „Ţi-am citit rubrica în fiecare lună", îmi spuse, pe cînd ne strîngeam mîinile. Te-ai gîndit vreodată să scrii despre Spot-the-spot?"

„Asta ce mai este?" am întrebat.

„Este unul dintre cele mai vechi jocuri de aici". Mă apucă de braţ şi mă duse pe cărarea dintre secţii, pînă într-un loc unde pe o masă era desenată o pată circulară roşie, cu diametrul de 1 yard. Obiectul jocului constă în a aşeza cinci discuri de metal, unul cîte unul, peste această pată, astfel încît s-o acopere complet. Fiecare disc are diametrul de circa 22 de ţoli. O dată ce aşezase un disc, jucătorul nu mai avea dreptul să-l mute, şi jocul era pierdut chiar dacă numai o bucăţică extrem de mică din pata roşie rămînea vizibilă după aşezarea celui de-al cincilea disc.

„Natural", spuse Profesorul, „folosim cea mai mare pată care poate fi acoperită de discuri. Mulţi oameni îşi închipuie că discurile trebuie plasate astfel". Le aranjă simetric peste pată, cum se vede în fig.151. Circumferinţa fiecărui disc atingea centrul petei, iar

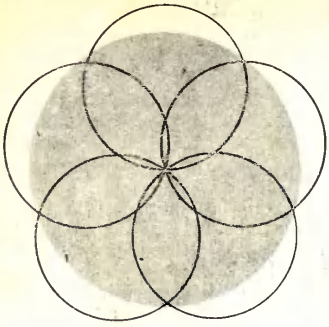


Fig. 151 O metodă mai slabă de a aşeza discurile.

centrele discurilor formau vîrfurile unui pentagon regulat. Mici arii roşii se vedeau la marginea discului.

„Din păcate, nu e bine aşa, continuă Riley. Pentru a acoperi aria circulară maximă, ele trebuie aranjate aşa". Împinse discurile cu degetul pînă obţinu formaţia din fig. 152. Discul *1*, explică el, are centrul pe diametrul *AD* şi circumferinţa într-un punct *C*, puţin mai jos de centrul *B* al petei. Discurile *3* şi *4* se aşază apoi

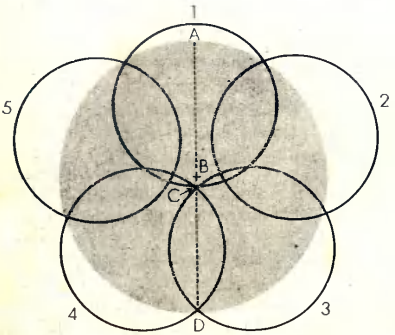


Fig. 152 Metoda corectă de a aşeza discurile.

în așa fel, încît marginile lor să treacă prin C și D. Discurile *2* și *5* acoperă restul petei.

Firește, am vrut să știu distanța BC. Riley nu ținea minte exact, dar mi-a trimis ulterior o referire la un articol în care problema este tratată în detaliu: „Despre soluția ecuațiilor funcționale numerice, ilustrat cu prezentarea unui joc popular și a soluției sale", de Eric H.Neville („Proceedings of the London Mathematical Society", seria a doua, vol.14, pp. 308—326, 1915). Dacă raza petei este 1, distanța BC este puțin mai mică decît 0,0285, iar cea mai mică rază posibilă a discurilor este 0,609+. Dacă discurile sînt așezate ca în fig.151, ele trebuie să aibă raza 0,6180339+ ca să poată acoperi complet pata. (Acest număr este inversul lui φ, raportul de aur, de care ne-am ocupat în cap.8, Cartea a doua.) O trăsătură curioasă a problemei constă în diferența foarte mică dintre ariile acoperite prin cele două metode de plasare a discurilor. Cît timp pata are diametrul de aproximativ 1 yard, diferența este abia perceptibilă.

„Aceasta îmi amintește, i-am spus, de o fascinantă problemă de arie minimă, nerezolvată pînă astăzi. Definim diametrul unei arii ca fiind cel mai lung segment de dreaptă care unește două puncte de pe ea. Întrebarea este: care sînt forma și aria celei mai mici figuri plane care acoperă o arie cu diametrul unitate?"

Profesorul dădu din cap. „Cel mai mic poligon regulat care satisface condiția este un hexagon de latură $1/\sqrt{3}$, dar acum vreo 30 de ani cineva a îmbunătățit soluția, tăind două vîrfuri". Luă un creion și o bucată de hîrtie din buzunar și desenă schița reprodusă în fig. 153. Vîrfurile sînt tăiate după tangente la cercul înscris (al cărui diametru este egal cu 1), și perpendicular pe dreptele duse din centrul cercului spre vîrfuri.

„Este cea mai bună soluție dată pînă acum?"

Riley dădu negativ din cap. „Am auzit că acum cîțiva ani cineva de la Universitatea din Illinois a găsit o altă arie, mai mică, dar nu cunosc amănuntele".

Am hoinărit în lungul potecii dintre diversele secții și ne-am oprit într-un loc unde trei zaruri imense se rostogoleau în jos pe o suprafață ondulată înclinată spre o masă plană pe care erau desenate cu alb cifrele de la 1 pînă la 6. Jucătorul poate pune cîți bani vrea pe oricare număr. Apoi se aruncă zarurile. Dacă numărul cade la un zar, el își primește înapoi miza, plus o sumă egală cu aceasta. Dacă numărul apare la două zaruri, el își capătă miza, plus

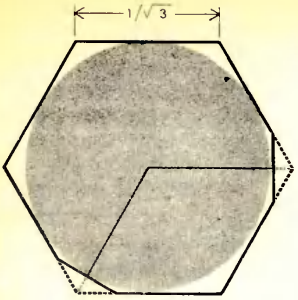


Fig. 153 Un hexagon trunchiat va acoperi o arie de diametru 1.

dublul mizei. Dacă numărul apare la toate trei zarurile, el primește miza plus triplul ei. Fireşte, dacă numărul nu apare de loc, jucătorul pierde miza.

„Cum poate acest joc să-ţi dea un cîştig? îl întrebai. Probabilitatea ca un anumit număr să apară la un zar este de 1/6, deci cu trei zaruri probabilitatea este 3/6 sau 1/2 că numărul va apărea cel puţin o dată. Dacă numărul apare mai mult decît o dată, jucătorul poate cîştiga mai mult decît mizează, aşa că se naşte impresia că jocul îl favorizează pe client."

Profesorul rîse pe înfundate. „Este tocmai ceea ce vrem să-şi închipuie naivii. Mai gîndeşte-te". Cînd m-am gîndit din nou la problemă, mai tîrziu, am rămas uluit. Poate că unora dintre cititori le va face plăcere să calculeze exact la ce cîştig se poate aştepta un jucător, dacă jocul durează mai mult, pentru fiecare dolar pe care-l mizează.

Înainte de a părăsi întreprinderea, Riley mă duce la unul din „punctele de alimentare" (cum le denumea el), ca să luăm o gustare. Ni se servi îndată cafeaua, dar am hotărît să aştept pînă vor veni sandviciurile.

„Dacă vrei să-ţi păstrezi cafeaua fierbinte, spuse profesorul, este mai bine să pui acum frişca. Cu cît cafeaua este mai fierbinte, cu atît ea cedează mai repede din căldura ei".

L-am ascultat şi am adăugat frişca.

Cînd sosi sandviciul cu şuncă al Profesorului, tăiat frumos la mijloc, se uită la el o clipă şi-mi spuse: „Ţi-a căzut vreodată în

mînă un articol al lui Tukey și Stone despre teorema generalizată a sandviciului?"

„Te referi la John Tukey și Arthur Stone? Doi dintre codescoperitorii flexagoanelor?"

„Întocmai".

Dădui negativ din cap. „Nu știu nimic, nici măcar despre teorema negeneralizată a sandviciului".

Riley își scoase din nou carnetul din buzunar și desenă un segment de dreaptă. „Orice figură unidimensională poate fi totdeauna tăiată în două de un punct. Nu-i așa?" Dădui din cap, în timp ce el desena două curbe închise neregulate, apoi o linie dreaptă care le tăia pe amîndouă (fig.154). „Orice pereche de arii în plan poate fi împărțită exact în două de o linie dreaptă. E corect?"

„Te cred".

„Nu este greu de demonstrat. Există o demonstrație elementară în cartea lui Richard Courant și Herbert Robbins, *Ce este matematica?*. Ea recurge la teorema lui Bolzano".

„Ah, da. Dacă o funcție continuă de x are valori pozitive și negative, ea trebuie să aibă cel puțin o valoare nulă".

„Asta-i. Pare banal, dar este un instrument foarte util în tot felul de demonstrații de existență. Firește, în acest caz, demonstrația nu ne spune cum să construim dreapta. Ea demonstrează doar existența ei".

„Ce rol joacă aici sandviciurile?"

„Dacă trecem la trei dimensiuni. Trei volume a trei corpuri oarecare, de indiferent ce mărime sau formă, așezate indiferent cum în spațiu, pot fi totdeauna tăiate exact și simultan în două părți egale printr-un plan, la fel cum tăiem două bucăți de pîine și felia de

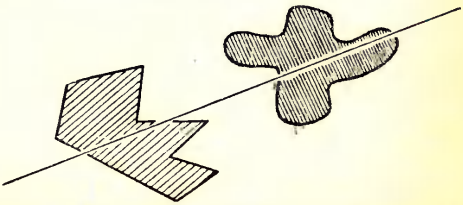


Fig. 154 „Teorema sandviciului", în două dimensiuni.

șuncă dintre ele. Stone și Tukey au generalizat teorema pentru toate dimensiunile. Ei au demonstrat că există totdeauna un hiperplan care taie în două patru solide cuadridimensionale așezate oricum în spațiul cuadridimensional, sau cinci solide 5—dimensionale etc."

Profesorul își goli ceașca apoi arătă pe masă o coloană de covrigi. „Dacă e vorba despre tăierea în felii a corpurilor, iată aici o întrebare curioasă, pe care poți să o pui o dată cititorilor. Care este numărul maxim de bucăți pe care îl putem obține cu trei plane care taie simultan un covrig? Este o problemă care m-a preocupat și pe mine".

Am închis ochii încercînd să-mi reprezint problema, în timp ce vacarmul continua alături, însă problema mi-a făcut capul să vîjîie, așa că am renunțat.

ADAOS

Jocul de bîlci cu cele trei zaruri este cunoscut în Statele Unite sub denumirea de *Chuck-a-luck* (prinde norocul) sau *Bird Cage* (colivia). Este un joc de zaruri obișnuit în tripouri, unde zarurile sînt aruncate în interiorul unei cuști de sîrmă, numită colivia cu pui. Citeodată, dispozitivul este prevăzut și cu electromagneți (vezi *Scarne on Dice*, de John Scarne și Clayton Rawson, Military Service Publishing Company, 1945, pp. 333—335). Jocul este discutat și în cap. 7 al broșurii lui M. J. Moroney, *Facts from Figures*, apărută la Penguin. Moroney numește jocul Coroana și ancora, deoarece în Anglia el este adesea jucat cu zaruri pe care sînt desenate cupa, trefla, caroul, pica, o coroană și o ancoră.

Moroney scrie: „Jocul este foarte frumos proiectat. În peste jumătate din aruncări, bancherului nu-i iese nimic. Ori de cîte ori cîștigă un jucător, bancherul plătește cu multă generozitate, așa încît ochii celui ce pierde se îndreaptă mai curînd spre fericitul cîștigător decît spre bancher. Cîștigurile spectaculoase sînt reduse la minimum, dar chiar dacă se întîmplă, ele sînt totdeauna atenuate de o aparentă generozitate.

Numeroși cititori și-au însușit sugestia Profesorului că este mai bine să-și pună frișca în cafea imediat, ca s-o păstreze fierbinte. Din nefericire, acești cititori erau cam în număr egal cu cei

care credeau că, dimpotrivă, cel mai bine este să pună frișca mai tîrziu și cu cei care erau de părere că este indiferent cînd se adaugă frișca.

L-am rugat pe Norman T. Gridgeman, un statistician de la Consiliul național de cercetări al Canadei, Ottawa, să studieze chestiunea și sînt fericit să comunic că analiza sa confirmă enunțul Profesorului. Pe baza faptului că viteza pierderii de căldură este proporțională cu diferența dintre temperatura corpului cald și cea a mediului ambiant, și luînd în considerare faptul important și care se trece ușor cu vederea că volumul cafelei crește după ce s-a adăugat frișca, reiese că o amestecare imediată a lichidelor conservă totdeauna căldura. Aceasta, indiferent dacă frișca este la temperatura camerei sau mai rece. Alți factori, cum sînt variațiile vitezei de radiație datorită culorii lichidului, o suprafață mai mare la ceștile de formă conică etc., exercită o influență neglijabilă.

Iată un exemplu tipic. Temperatura inițială a 250 g de cafea este de 90°C, iar temperatura inițială a 50 g de frișcă este de 10°C, mediul avînd 20°C. Dacă adăugăm frișca imediat, temperatura cafelei va fi, după 30 min, de circa 48°C. Dacă adăugăm frișca abia după 30 min, temperatura rezultantă va fi de 45°C, deci o diferență de 3°.

RĂSPUNSURI

Cineva care joacă cu cele trei zaruri se poate aștepta la un cîștig ceva mai mare de 92 de cenți pentru fiecare dolar mizat. Există 216 feluri echiprobabile în care pot cădea trei zaruri, dintre care 91 dau cîștig pentru jucător. Șansele sale de a cîștiga ceva la fiecare miză sînt deci 91/216. Să presupunem că el joacă de 216 ori, mizînd cîte un dolar și că, de fiecare dată, cele trei zaruri cad altfel. La 75 dintre cîștigurile sale, numărul său apare doar o dată; deci el capătă 150 de dolari. La 15 cîștiguri, numărul iese de două ori; deci el capătă 45 de dolari. La un cîștig, el iese de trei ori; deci 4 dolari. Deci în total i se plătesc 199 de dolari. Pentru a cîștiga această sumă el mizează 216 dolari, deci el se așteaptă ca, într-un joc mai îndelungat, să cîștige pentru fiecare dolar mizat 199/216 dolari, deci 0,9212 dolari. Aceasta înseamnă

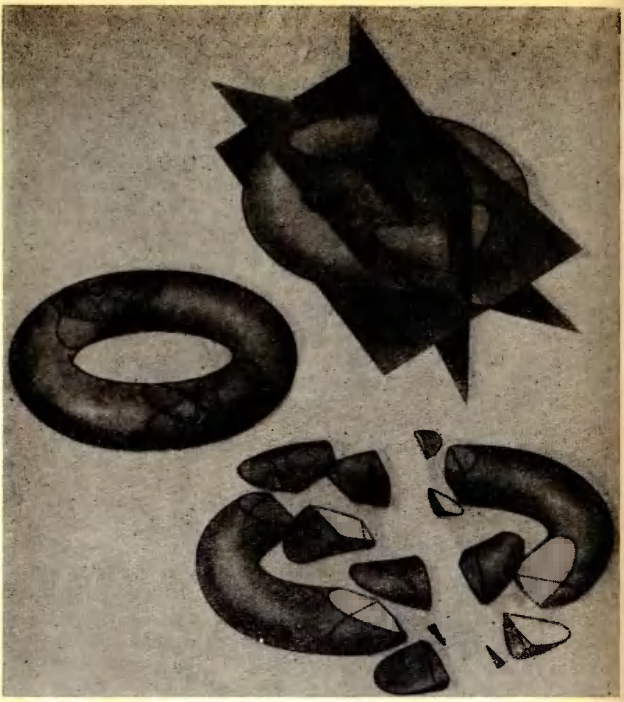


Fig. 155 Cum împărțim un covrig în 13 bucăți prin trei secțiuni plane.

pentru dispozitiv un cîștig ceva mai mic de 7,8 cenți la fiecare dolar mizat, deci un cîștig de aproximativ 7,8%.

Figura 155 arată cum putem tăia un covrig în 13 bucăți prin trei plane secante simultan. Numeroși corespondenți mi-au trimis soluții corecte, dar cei mai mulți nu au reușit să găsească bucata

a 13-a. Formula pentru cel mai mare număr de fragmente care se pot obține cu n tăieturi este:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 8n}{6}.$$

Dacă avem voie să reașezăm fragmentele după fiecare tăietură, putem obține chiar 18 bucăți.

Am primit multe scrisori interesante despre problema tăierii covrigului. Derrill Bordelon, de la U.S. Naval Ordonance Laboratory, din Silver Spring, Maryland, a trimis o demonstrație amănunțită a formulei pentru n tăieturi. Dan Massey Jr, din Chattanooga, Tennessee, a făcut speculații asupra unei formule pentru covrigi cu n dimensiuni. Richard Gould, Menlo Park, California, mi-a comunicat pe marginea unei scrisori că a obținut o astfel de formulă generalizată, dar că marginea este prea mică pentru a o cuprinde. John McClellan, Woodstock, New York, a pus o problemă dificilă: care este proporția optimă dintre diametrul găurii covrigului și diametrul întreg pentru a obține cele mai multe bucăți *mici*?

David B. Hall, Towson, Maryland, scrie, după mai multe experimentări îngrijite, cu covrigi reali:

Domnilor,

Un mic studiu al problemei arăta că trebuie să avem un maxim de 13 bucăți. Cu aceasta chestiunea ar fi fost închisă, însă data următoare cînd am fost la băcănie și am cumpărat o cutie de covrigi, am descoperit că problemele tehnice sînt tot atît de misterioase ca și cele matematice.

A obține 13 bucăți presupune o piramidă zveltă cu vîrful în corpul covrigului. După ce am constatat că se pot face rezonabil tăierile previzibile, luînd ca repere scobitori înfipte în covrig, am efectuat prima mea secționare, numai pentru a descoperi că nu pot găsi nici urmă a celor două piramide mai mici. (Am obținut o mulțime de firimituri, dar cred că acestea nu contează.) Reiese că exigența de a tăia cu trei plane un covrig necesită, nu numai o secționare îngrijită, ci și precauții mari față de mișcarea bucăților în formă de pană, pe măsură ce facem secționările consecutive. În acest caz, părțile care conțin piramidele mici se fărămițează foarte puțin, dar suficient pentru a scăpa cu totul de sub cuțit.

La ultimul covrig, utilizînd ace de oțel în locul scobitorilor, am realizat un succes deplin și am obținut 15 bucăți bine definite. Piramidele erau foarte izbutite. Fiind mai mult decît zelos în prevenirea fărîmițării, am reușit să obțin în schimb o mică încălecare. Cele două bucăți mai pretențioase au rezultat datorită faptului că gaura nu era tocmai rotundă, și că fiecare dintre primele două secționări a dat cîte un rest mic, dar vizibil.

Un covrig în formă de cerc ar fi mai ușor de tăiat, dar acest aranjament a fost descoperit abia după ce am mîncat covrigii și nu l-am mai cercetat.

Capitolul 14

ALTE NOUĂ PROBLEME

1. STRĂBATEREA DEȘERTULUI

La marginea unui deșert lat de 800 de mile este disponibilă o rezervă nelimitată de benzină, dar nu există nici o sursă în interiorul deșertului. Un autovechicul poate lua destulă benzină pentru 500 de mile (aceasta se va chema o „încărcătură"); pentru el se poate construi propria stație de reaprovizionare în orice punct al parcursului. Aceste rezervoare pot fi de orice mărime și se presupune că nu avem pierderi prin evaporare.

Care este cantitatea minimă de benzină (în încărcături) de care va avea nevoie autovehiculul pentru a traversa deșertul? Există o limită a lățimii deșertului pe care-l poate străbate autovehiculul?

2. CEI DOI COPII

Smith are doi copii. Cel puțin unul dintre ei este băiat. Care este probabilitatea ca ambii să fie băieți?

Jones are doi copii. Cel mai mare dintre ei este o fată. Care este probabilitatea ca ambii copii să fie fete?

3. PROBLEMA DE ȘAH A LORDULUI DUNSANY

Admiratorii scriitorului irlandez lord Dunsany știu că acesta era un mare iubitor de șah. (Povestirea sa „Gambitul celor trei marinari" este, cu siguranță, cea mai amuzantă fantezie despre șah care s-a scris vreodată.) Nu este însă unanim cunoscut că-i plăcea să inventeze bizare probleme de șah, în care, ca și în scrierile sale, umorul se îmbină cu imaginația.

Problema din fig. 156 este o contribuție a lui Dunsany la cartea *The Week-End Problems Book*, compilată de Hubert Phillips.

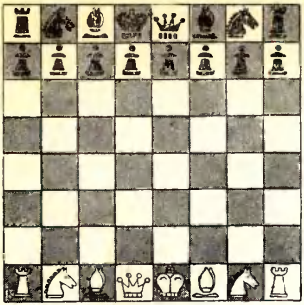


Fig. 156 Problema de şah a lordului Dunsany.

Soluţia apelează mai mult la gîndirea logică decît la priceperea în şah, deşi presupune cunoaşterea regulilor jocului. Albele joacă şi dau mat în patru mutări. Poziţia poate surveni într-o partidă reală.

4. PROFESORUL PE SCARA RULANTĂ

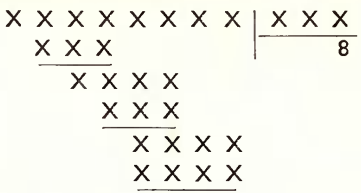
Cînd profesorul Stanislaw Slapenarski, un matematician polonez, a coborît foarte încet pe scara rulantă care se mişca în jos, el a ajuns jos după 50 de trepte. Ca experiment, el a alergat apoi în sus pe aceeaşi scară rulantă, cîte o treaptă o dată, şi a ajuns sus după 125 de trepte.

Presupunînd că profesorul a urcat de cinci ori mai repede decît a coborît (adică a luat cîte cinci trepte pentru fiecare treaptă dinainte) şi că a făcut fiecare drum cu viteză constantă, cîte trepte ar fi vizibile dacă scara rulantă s-ar opri?

5. OPTUL SINGURATIC

Cea mai celebră problemă pe care a publicat-o vreodată „The American Mathematical Monthly", a cărei soluţie a fost dezvăluită recent, este următoarea. Problema a fost o contribuţie a lui P.L. Chessin, de la Westinghouse Electric Corporation, la numărul din aprilie 1954.

„Bunul nostru prieten, prof. Euclide Paracelso Bombasto Umbugio, eminent specialist în teoria numerelor, s-a ocupat cu sîrguință la calculatorul său de birou, de cele 81×10^9 de soluții posibile la problema reconstituirii următoarei împărțiri exacte lungi, în care cifrele erau înlocuite toate cu X-uri, cu excepția cîtului, unde erau omise cu totul:



„Dezumflați-l pe profesor! Adică reduceți posibilitățile la $(81 \times \times 10^9)^{0,2}$

Întrucît orice număr la puterea zero este egal cu 1, sarcina cititorului este de a descoperi reconstituirea unică a problemei. Cifra 8 este așezată corect sub linie, deci este a treia cifră într-un răspuns de cinci cifre. Problema este mai ușoară decît pare, necesitînd doar înțelegerea cîtorva situații elementare.

6. ÎMPĂRȚIREA TORTULUI

Există un procedeu simplu, datorită căruia două persoane pot împărți între ele un tort, astfel încît fiecare să aibă satisfacția că a primit cel puțin jumătate; unul taie, iar celălalt alege. Imaginați un procedeu general, astfel încît n persoane să taie un tort în n porții, de așa manieră încît fiecare să fie satisfăcut că i-a revenit cel puțin $1/n$ din tort.

7. FOAIA DE HÎRTIE ÎMPĂTURITĂ

Matematicienii nu au reușit încă să găsească o formulă pentru numărul de moduri diferite în care poate fi împăturită o hartă rutieră, dacă hîrtia are n cute. Ne putem face o idee asupra complexi-

1	8	7	4
2	3	6	5

Fig. 157 Enigma lui Dudeney cu împărțirea hârtii.

1	8	2	7
4	5	3	6

tății chestiunii, din următorul joc inventat de enigmistul englez Henry Ernest Dudeney.

Împărțiți o foaie de hîrtie dreptunghiulară în opt pătrate și numerotați-le numai pe o singură față, cum se vede în fig. 157, stînga sus. Există 40 de feluri diferite de a împături această „hartă" în lungul dreptelor trase cu rigla, pentru a forma un pachet pătrat, avînd pe prima față pătratul *1* și toate celelalte pătrate dedesubt. Problema constă în a împături hîrtia în așa fel încît pătratele să se succeadă în ordinea naturală de la *1* la *8*, cu *1* pe prima față.

Dacă reușiți, încercați și problema mult mai dificilă cu foaia de hîrtie numerotată ca în partea de jos a figurii.

8. CASIERUL DISTRAT

Un casier de bancă distrat, plătind un cec pentru un oarecare Brown, a încurcat dolarii și cenții, dîndu-i acestuia dolari în loc de cenți și cenți în loc de dolari. După ce a cumpărat un ziar cu 5 cenți, Brown a descoperit că i-a rămas exact dublul valorii inițiale a ceculuí. Care era suma de pe cec?

9. APĂ ȘI VIN

O problemă răsuflată și arhicunoscută se ocupă de două vase, unul cu apă, și unul cu vin. Turnăm o anumită cantitate de apă în vin, apoi aceeași cantitate din amestec înapoi în apă. Avem acum

mai multă apă în vin sau mai mult vin în apă? Răspunsul este că cele două cantități sînt egale.

Raymond Smullyan îmi scrie pentru a-mi pune următoarea întrebare: Să presupunem că începem cu un pahar de 10 uncii de apă și unul de 10 uncii de vin. Turnînd încoace și încolo de un număr de ori cîte trei uncii și amestecînd după fiecare transvasare, este posibil să ajungem la un punct în care procentul de vin în ambele amestecuri să fie același?

RĂSPUNSURI

1. Următoarea analiză a problemei traversării deșertului a apărut într-un număr recent al revistei „Eureka", pe care o editează studenții de la matematică ai Universității din Cambridge. Vom numi 500 de mile o „unitate"; benzina suficientă pentru ca autovehiculul să parcurgă 500 de mile va fi denumită „încărcătură"; iar un „parcurs" va fi drumul pe care-l efectuează autovehiculul, în indiferent ce sens, de la un punct de reaprovizionare la altul.

Două încărcături vor permite autovehiculului să parcurgă o distanță maximă de 1 și 1/3 unități. Aceasta se face în patru parcursuri, amenajînd întîi un rezervor la 1/3 unități de punctul de plecare. Autovehiculul începe cu o încărcătură completă, merge pînă la rezervor, lasă o treime de încărcătură, se întoarce, ia o nouă încărcătură completă, ajunge la rezervor și mai încarcă 1/3 de încărcătură de acolo. Autovehiculul are acum o încărcătură completă, suficientă pentru a face restul distanței pînă la o unitate.

Trei încărcături vor permite vehiculului să parcurgă 1 și 1/3 plus 1/5 unități, într-un total de nouă parcursuri. Primul rezervor este la 1/5 unități de start. Trei parcursuri aduc 6/5 încărcături la rezervor. Autovehiculul se întoarce, ia o încărcătură completă și ajunge la primul rezervor cu 4/5 din încărcătură. Aceasta, împreună cu rezerva de aici, face două încărcături complete, destul pentru ca autovehiculul să parcurgă restul de 1 și 1/3 unități, cum se explică în aliniatul precedent.

Ni se cere minimul de carburant necesar pentru ca autovehiculul să străbată 800 de mile. Trei încărcături îl vor duce la 766 și 2/3 mile (1 și 1/3 plus 1/5 unități), deci avem nevoie de un al treilea rezervor la distanța de 33 și 1/3 mile (1/15 unități) de punctul de pornire. În cinci parcursuri, autovehiculul poate construi acest

rezervor, astfel încît, atunci cînd ajunge aici la sfîrșitul celu de-al șaptelea parcurs, totalul carburantului din autovehicul și din rezervor să reprezinte trei încărcături. După cum am văzut, această cantitate este suficientă pentru ca autovehiculul să străbată restul distanței de 766 și 2/3 mile. Șapte parcursuri se efectuează între punctul de start și primul rezervor, consumînd 7/15 încărcături de benzină. Cele trei încărcături care rămîn sînt suficiente pentru restul drumului, deci cantitatea totală de benzină consumată va fi 3 și 7/15, deci ceva mai mult decît 3,46 încărcături. Sînt necesare deci 16 parcursuri.

Procedînd la fel în continuare, patru încărcături vor duce autovehiculul la distanța de 1 și 1/3 plus 1/5 plus 1/7 unități, cu trei rezervoare dispuse la capetele acestor distanțe. Suma acestei serii infinite este divergentă pe măsură ce crește numărul de încărcături; de aceea, autovehiculul poate traversa un deșert de orice lățime. Dacă deșertul are lățimea de 1 000 de mile, atunci vor fi suficiente șapte rezervoare, 64 de parcursuri și 7,673 încărcături.

Am primit sute de scrisori referitoare la această problemă, care conțin soluții generale și observații marginale interesante. Cecil G. Phipps, profesor de matematică la Universitatea din Florida, a sintetizat pe scurt chestiunea astfel:

„Soluția generală este dată de formula

$$d = m(1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots),$$

unde d este distanța de traversat, iar m numărul de mile la o încărcătură de benzină. Numărul de depozite de stabilit este mai mic cu o unitate decît numărul de termeni din serie, necesar pentru a atinge valoarea d. O încărcătură de benzină este consumată pentru parcursul dintre fiecare pereche de depozite. Seria fiind divergentă, prin această metodă poate fi atinsă orice distanță, deși cantitatea de benzină necesară crește exponențial.

Dacă autovehiculul trebuie, eventual, să revină la punctul de bază, formula devine

$$d = m(1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots).$$

Această serie este, și ea, divergentă, iar soluția are proprietăți similare cu cele pentru călătoria într-un singur sens".

Mai mulți cititori mi-au atras atenția asupra a trei discuții publicate anterior referitor la această problemă:

Problema jeepului: o soluție mai generală, C.G. Phipps, în „American Mathematical Monthly", vol. 54, nr. 8, pp. 458—462, octombrie, 1947.

Traversarea deșertului, G.G. Alway, în „Mathematical Gazette", vol. 41, nr. 337, p. 209, octombrie, 1947.

Problemă de logistică: problema jeepului, Olaf Helmer, Project Rand Report, Nr. RA-15015, 1 decembrie, 1946. (Aceasta a fost prima dare de seamă neclasificată în cadrul publicațiilor Rand, apărută pe cînd proiectul se mai afla în sarcina lui Douglas Aircraft Company. Este cea mai limpede analiză a problemei, din cîte am văzut, cuprinzînd și varianta călătoriilor cu întoarcere.)

2. Dacă Smith are doi copii, dintre care cel puțin unul este băiat, avem trei cazuri echiprobabile:

Băiat—băiat
Băiat—fată
Fată—băiat

Numai într-un singur caz ambii sînt băieți, deci probabilitatea este 1/3.

Situația lui Jones este diferită. Ni se spune că cel mai mare dintre copii este fată. Aceasta ne limitează numai la două cazuri echiprobabile:

Fată—fată
Fată—băiat

De aceea, probabilitatea ca ambii copii să fie fete este 1/2. (Așa am răspuns eu la problemă în articolul meu. După ce am citit protestele mai multor cititori și am meditat mai adînc asupra chestiunii, mi-am dat seama că problema era enunțată ambiguu și că nu se putea răspunde la ea fără anumite date suplimentare. Vezi discuția în continuare a problemei în cap. 19, Cartea a doua.)

3. Cheia la problema de șah a lordului Dunsany, stă în faptul că dama neagră nu este situată pe un pătrățel negru, așa cum ar trebui la începerea jocului. Aceasta înseamnă că regele negru și dama neagră au efectuat mutări, ceea ce putea să se întîmple numai dacă au fost mutați și niște pioni negri. Pionii nu se pot muta decît înainte, deci sîntem nevoiți să tragem concluzia că pionii negri au ajuns în poziția lor actuală plecînd de la partea cealaltă a tablei! Dacă luăm în considerare aceasta, constatăm ușor că calul alb din dreapta dă cu ușurință mat în patru mutări.

Prima mutare pentru alb este de a duce calul în colțul din dreapta jos a tablei, exact deasupra regelui. Dacă negrul își mută calul de sus din stînga spre tură, albul dă mat după două mutări. Negrul poate însă amîna matul cu o mutare, ducîndu-și calul spre nebun, nu spre tură. Albul mută calul înainte și spre dreapta spre nebun, dînd mat la mutarea următoare. Negrul își mută calul înainte, pentru a bloca matul. Albul ia calul cu dama, apoi dă mat cu calul în mutarea a patra.

4. Fie n numărul de trepte vizibile atunci cînd scara rulantă este în repaus și fie unitatea de timp egală cu intervalul necesar profesorului Slapenarski ca să coboare o treaptă. Dacă el coboară scara rulantă, care se mișcă în jos, făcînd 50 de pași, atunci $n - 50$ trepte au dispărut din vedere în 50 de unități de timp. El are nevoie de 125 de pași ca să urce aceeași scară rulantă, cinci pași de acum corespunzînd fiecărui pas dinainte. În acest drum, $125 - n$ trepte au dispărut din vedere în $125/5 = 25$ de unități de timp. Deoarece putem presupune că scara rulantă are o viteză constantă, avem următoarea ecuație liniară:

$$\frac{n-50}{50} = \frac{125-n}{25},$$

care dă direct soluția $n = 100$ de trepte.

5. Într-o împărțire lungă, dacă sînt aduse jos două cifre în loc de una singură, trebuie să avem un zero în cît. Aceasta se întîmplă de două ori, deci știm imediat că forma cîtului este XO8OX. Dacă împărțitorul este înmulțit cu ultima cifră a cîtului, produsul este un număr de patru cifre. De aceea ultima cifră a cîtului trebuie să fie 9, întrucît împărțitorul înmulțit cu 8 dă un număr de trei cifre.

Împărțitorul trebuie să fie mai mic decît 125, deoarece de opt ori 125 este 1 000, un număr de patru cifre. Acum putem deduce că prima cifră a cîtului trebuie să fie mai mare decît 7, deoarece de șapte ori un împărțitor mai mic decît 125 va da un produs care va lăsa mai mult decît două cifre după ce a fost scăzut din primele patru cifre ale deîmpărțitului. Prima cifră nu poate fi 9 (care dă un număr de patru cifre dacă o înmulțim cu împărțitorul), deci trebuie să fie 8 și cîtul întreg va fi 80 809.

Împărțitorul trebuie să fie mai mare decît 123, deoarece 80 809 înmulțit cu 123 este un număr de 7 cifre, pe cînd deîmpărțitul nos-

tru are opt. Singurul număr cuprins între 123 și 125 este 124. Putem reconstitui acum întreaga împărțire, astfel:

$$\begin{array}{r|l} 10\,020\,316 & 124 \\ \hline 992 & 80\,809 \\ \hline 1\,003 & \\ 992 & \\ \hline 1\,116 & \\ 1\,116 & \end{array}$$

6. S-au inventat mai multe procedee prin care n persoane își pot împărți un tort în n bucăți, așa încît fiecare să fie satisfăcut că i-a revenit cel puțin $1/n$ din tort. Următorul sistem are meritul de a nu lăsa excedente la împărțire.

Să presupunem că avem cinci persoane: A, B, C, D, E. A taie $1/5$ din tortă și și-o păstrează fiind partea lui. B are acum privilegiul, dacă-și închipuie că bucata lui A depășește $1/5$, s-o reducă la cît crede el că este $1/5$, tăind o bucățică. Firește, dacă B consideră că este $1/5$ sau mai puțin, nu se atinge de partea lui A. La rîndul lor, C, D, și E au acum același privilegiu. Ultima persoană care atinge o bucată și-o păstrează, ca fiind partea ce-i revine. Oricine crede că această ultimă persoană a primit mai puțin decît $1/5$ este bucuroasă, firește, deoarece, crede că au rămas mai mult decît $4/5$. Ceea ce rămîne din tortă, inclusiv bucățile tăiate separat, se împarte acum între cele patru persoane rămase, în același mod, apoi între trei persoane. Ultima împărțire se face astfel: o persoană taie, iar cealaltă alege. Este limpede că procedeul se aplică la orice număr de persoane.

Discutarea acestei soluții și a altora se găsește în cartea lui R. Duncan Luce și Howard Raiffa, *Games and Decisions*, John Willey and Sons, Inc., 1957, capitolul „Jocuri de împărțire dreaptă", pp. 363—368.

7. Prima coală se împăturește astfel: țineți-o cu fața în jos, astfel încît, dacă o priviți de sus, pătratele numerotate să fie în poziția

$$\begin{array}{c} 2\,365 \\ \hline 1\,874 \end{array}$$

Îndoiți partea din dreapta peste cea din stînga, încît 5 să se suprapună cu 2, 6 cu 3, 4 cu 1 și 7 cu 8. Împăturiți partea de jos, așa încît

4 să vină peste 5 și 7 peste 6. Acum îndoiți 4 și 5 între 6 și 3, iar 1 și 2 dedesubtul pachetului.

A doua coală se îndoaie întîi longitudinal, cu cifrele în afară, și se ține așa încît 4 536 să fie deasupra. Suprapuneți 4 cu 5. Capătul din dreapta al benzii (pătratele 6 și 7) se introduce între 1 și 4, apoi curbați în jurul marginii împăturite a lui 4, astfel încît 6 și 7 să ajungă între 8 și 5, iar 3 și 2 între 1 și 4.

8. Pentru a determina valoarea cecului lui Brown, fie x numărul de dolari și y numărul de cenți. Problema poate fi exprimată acum în următoarea ecuație: $100\ y + x - 5 = 2(100x + y)$. Aceasta se reduce la $98y - 199x = 5$, o ecuație diofantică cu o infinitate de soluții întregi. Prin metoda standard a fracțiilor continue se obține cea mai mică soluție în numere întregi și pozitive: $x = 31$ și $y = 63$, deci cecul lui Brown era 31,63 de dolari. Răspunsul este unic, deoarece valoarea imediat următoare este $x = 129$, $y = 262$, care nu satisface condiția ca y să fie mai mic de 100.

Există o abordare mult mai simplă a problemei, despre care mi-au scris mulți cititori. Ca și înainte, fie x numărul de dolari și y numărul de cenți. După ce și-a cumpărat ziarul, lui Brown i-au rămas $2x + 2y$. Restul din cei x cenți pe care i-a primit de la casier va fi $x - 5$.

Știm că y este mai mic decît 100, dar nu știm încă dacă este mai mic decît 50 de cenți. Dacă este mai mic decît 50 de cenți, putem scrie următoarele ecuații:

$$2x = y,$$
$$2y = x - 5$$

Dacă y este 50 cenți sau mai mult, atunci îi rămîne lui Brown un număr de cenți ($2y$) care fac un dolar sau mai mult. De aceea, trebuie să modificăm ecuațiile de mai sus, scăzînd 100 din $2y$ și adăugînd 1 la $2x$. Ecuațiile devin

$$2x + 1 = y,$$
$$2y - 100 = x - 5.$$

Fiecare pereche de ecuații se rezolvă ușor. Primele dau pentru x o valoare negativă, care se elimină. A doua pereche dă valorile corecte.

9. Indiferent de cît vin avem într-un vas și de cîtă apă în celălalt și indiferent de cantitatea de lichid transferată încoace și încolo la fiecare pas (cu condiția ca să nu avem tot lichidul într-un singur vas), este imposibil să ajungem la un punct cînd procentajul vinu-

lui este același în fiecare amestec. Aceasta se poate arăta printr-o demonstrație inductivă simplă. Dacă vasul A conține o concentrație de vin mai mare decît vasul B, atunci un transfer din A în B va lăsa A cu concentrația mai ridicată. Tot astfel, un transfer din B în A — dintr-un amestec mai slab într-unul mai tare — va lăsa cu siguranță B mai puțin concentrat. Întrucît orice transfer se face într-un sens sau în celălalt, rezultă că vasul A trebuie să conțină totdeauna un amestec cu un procentaj de vin mai înalt decît B. Singura cale de a egaliza concentrațiile constă în a vărsa tot conținutul unui vas în celălalt.

Există o eroare în soluția de mai sus. Ea presupune divizibilitatea infinită a lichidelor, deși acestea sînt constituite din molecule discrete. P.E. Argyle, din Royal Oak, Columbia Britanică, mi-a trimis următoarea scrisoare:

Domnilor,

Soluția dv. la problema amestecării vinului cu apa pare să ignore natura fizică a obiectelor respective. Dacă un eșantion de fluid este scos dintr-un amestec a două fluide, proporția unui fluid în eșantion va fi diferită de proporția lui în amestec. Abaterea de la cifra „corectă" va fi de ordinul lui $\pm \sqrt{n}$ *unde* n *este numărul de molecule la a căror prezență ne așteptăm.*

Prin urmare, este posibil să avem cantități egale de vin în ambele pahare. Probabilitatea ca aceasta să se întîmple devine considerabilă după ce lipsa de egalitate previzibilă în amestec a fost redusă pînă la o mărime de ordinul lui $\sqrt{n}$. *Aceasta nu cere decît 47 de duble transvasări pentru problemă, așa cum a fost ea enunțată...*

Capitolul 15

ELEUSIS, JOCUL INDUCTIV

Cele mai multe jocuri matematice, de la ticktacktoe și pînă la șah, apelează la raționamentul deductiv al jucătorilor. Spre deosebire de acestea, Eleusis, un remarcabil și nou joc de cărți, născocit de Robert Abbott, este un joc inductiv. Abbott este un tînăr scriitor din New York, care a inventat un mare număr de jocuri neobișnuite, cu cărți și pe diverse table, dar acesta prezintă un interes deosebit pentru matematicieni, precum și pentru alți oameni de știință, datorită analogiei sale pregnante cu metoda științifică și datorită faptului că exersează tocmai priceperile psihice din domeniul formării noțiunilor, care par să stea la baza „intuițiilor" gîndirii creatoare.

Eleusis este un joc pentru trei sau mai mulți participanți. El utilizează un pachet de cărți de joc obișnuit. Jucătorii iau pe rînd rolul de „bancher", care nu are altă participare la joc decît aceea de a fi întrucîtva un arbitru. El împarte cărțile celorlalți jucători, pînă rămîne una singură. Aceasta este așezată cu fața în sus pe mijlocul mesei, ca primă carte a „pachetului de pornire". Pentru a fi sigur că jucătorii au primit un număr egal de cărți, bancherul, înainte de a le împărți, trebuie să elimine unele din ele. Pentru trei jucători (inclusiv bancherul, care, firește, nu capătă cărți), el elimină o carte; pentru patru jucători, nici una; pentru cinci jucători, trei cărți etc. Cărțile eliminate se pun deoparte, fără a fi văzute.

După ce cărțile au fost împărțite și „cartea de pornire" așezată la locul ei, bancherul alcătuiește o regulă secretă, care determină ce cărți pot fi puse peste pachetul de pornire. Această regulă este cea care corespunde unei legi științifice. Bancherul scrie regula pe o bucată de hîrtie, o împăturește și o pune deoparte. Aceasta, ca să se poată verifica ulterior și să existe siguranța că bancherul nu a încălcat uniformitatea regulei. Scopul fiecărui jucător este să

scape de cît mai multe cărți cu putință. Aceasta o poate realiza repede orice jucător care a ghicit corect regula secretă.

Un exemplu de regulă foarte simplă: „Dacă cartea de sus a pachetului de pornire este roșie, joacă una neagră. Dacă este neagră, joacă una roșie". Este recomandabil ca începătorii să se limiteze la reguli extrem de simple de acest tip, trecînd apoi la reguli mai complicate, pe măsură ce le crește îndemînarea în joc. Una dintre cele mai ingenioase trăsături ale jocului Eleusis este că metoda de punctaj (o vom explica mai tîrziu) exercită presiuni asupra bancherului pentru ca să aleagă o regulă pe care nu oricine o va ghici curînd, dar care este destul de simplă pentru ca să fie plauzibil că un jucător o va ghici înaintea celorlalți și destul de devreme în desfășurarea jocului. Și aici avem o analogie frumoasă. Legile de bază ale fizicii sînt greu de pus în evidență, dar o dată descoperite, se observă, de obicei, că ele sînt bazate pe ecuații relativ simple.

După ce regula a fost scrisă, începe „prima etapă" a jocului. Primul jucător ia o carte din mînă și o așază cu fața în sus peste cartea de pornire. Dacă el a jucat conform regulei secrete, bancherul îi spune „corect", și cartea rămîne deasupra pachetului. Dacă încalcă regula, bancherul spune „fals". Jucătorul își retrage atunci cartea, o pune cu fața în sus în dreptul locului său la masă și urmează la joc partenerul din stînga sa. Fiecare jucător pune cîte o carte din mînă, rînd pe rînd. „Cărțile greșite" ale fiecăruia rămîn așezate cu fața în sus în dreptul său, ușor desfăcute, ca să poată fi identificate limpede. Cărțile jucate corect, care formează pachetul de pornire, se desfășoară și ele în lungul mesei, astfel încît să poată fi văzute toate cărțile. Un pachet tipic de acest fel este arătat în fig. 158.

Fiecare jucător încearcă să analizeze cărțile de pe masă pentru a descoperi regula care le guvernează înșiruirea. El formează apoi o ipoteză, pe care o poate verifica, jucînd ceea ce crede că este o carte corectă, sau una despre care bănuiește că va fi respinsă. Prima etapă a jocului se termină atunci cînd toate cărțile pe care jucătorii le aveau în mînă au fost epuizate.

Bancherul își notează acum scorul. Acesta este bazat pe diferența dintre numărul de cărți ale jucătorului fruntaș (care are cele mai puține cărți greșite) și cele ale celorlalți. Dacă sînt doi jucători (fără bancher), scorul bancherului este numărul de cărți din pachetul greșit al jucătorului fruntaș, scăzut din numărul de cărți greșite ale celuilalt. Pentru trei jucători, cărțile greșite ale jucătorului fruntaș

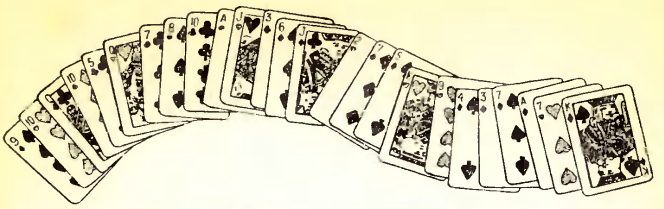


Fig. 158 „Pachet de pornire" tipic. Ce regulă secretă determină ordinea cărților?

se înmulțesc cu doi, apoi se scad din totalul de cărți greșite ale celorlalți doi. Pentru patru jucători, se înmulțește cu 3 și se procedează la fel. Pentru cinci jucători înmulțitorul este 4, pentru șase, înmulțitorul este 5 etc. Culoarea și valoarea cărților nu contează pentru scor.

De exemplu, să presupunem că avem trei jucători și bancherul. Cărțile greșite sînt în număr de 10, 5 și 3. De două ori 3 fac 6, care se scade din 15, dînd scorul de 9 pentru bancher. Acesta este notat și jocul intră în etapa a doua, finală, în care se joacă cărțile greșite.

Cărțile greșite rămîn așezate cu fața în sus pe masă, în dreptul fiecărui jucător, dar, dacă vrea, jucătorul are dreptul să și le aranjeze altfel. Jocul se face rînd pe rînd, ca și înainte, fiecare jucător luînd cîte o singură carte și punînd-o deasupra pachetului de pornire. Bancherul îi spune dacă a procedat corect sau greșit. Dacă a greșit, el pune cartea înapoi în fața sa, printre cele greșite. Etapa a doua se termină cînd un jucător scapă de toate cărțile sale sau cînd bancherul își dă seama că nu mai este posibil să accepte alte cărți.

Se desface acum hîrtia și se dă citire regulii. Aceasta corespunde, într-un anumit sens, cu demonstrația deductivă finală pe care un matematician o dă unei teoreme, care îi fusese sugerată inițial de o ipoteză inductivă, bazată pe o mulțime de observații particulare. Firește, oamenii de știință nu dispun de această verificare finală și trebuie să se mulțumească cu stabilirea ipotezelor lor la un înalt grad de probabilitate.

Se face acum scorul jucătorilor într-un mod similar celui descris mai sus. Fiecare ia numărul de cărți din fața sa, înmulțește cu numărul celorlalți jucători, scăzîndu-se pe sine și pe bancher, apoi scade

produsul din numărul total de cărți rămase în fața celorlalți jucători. Dacă rezultatul este negativ, scorul său este 0. Jucătorul care a terminat toate cărțile capătă o bonificație egală cu 6. Dacă nici unul nu a terminat, bonificația se atribuie jucătorului căruia i-au rămas cele mai puține cărți, iar dacă sînt mai mulți, bonificația se împarte între ei. De exemplu, dacă avem patru jucători (fără bancher) cărora le-au rămas două, trei, 10 și nici o carte, scorul respectiv va fi 7,3,0 și 21.

Acum jucătorul care urmează în stînga bancherului îi preia atribuțiile. Jocul continuă pînă cînd fiecare a fost bancher de două ori; apoi cîștigă jucătorul cu punctajul cel mai mare.

Dacă regula nu este aplicabilă decît atunci cînd pachetul de pornire are cel puțin două cărți, atunci prima carte jucată este totdeauna corectă. Dacă regula comportă numere, atunci asul (A) este 1, valetul (J) 11, dama (Q) 12 și popa (K) 13. Dacă se admite „ciclicitatea" (adică suita J—Q — K — A — 2 — 3...), bancherul trebuie să menționeze aceasta într-o regulă.

Trebuie evitate regulile care restrîng posibilitățile unui jucător, de cele mai multe ori cînd îi vine rîndul, la mai puțin decît o cincime din cărțile pachetului întreg. De exemplu, regula „joacă o carte cu o unitate mai mare decît a ultimei cărți" este inacceptabilă, deoarece, la fiecare tur, jucătorul ar fi limitat la numai patru cărți din cele 52.

După ce și-a redactat regula, bancherul poate, dacă vrea, să dea o indicație referitoare la ea. El poate spune: „Această regulă se referă la ultimele două cărți din pachetul de pornire" sau „Această regulă se referă la culori". După ce începe jocul, nu se mai admit alte indicații, decît dacă jocul nu izbutește să se constituie.

Sînt tipice următoarele reguli secrete date în ordinea crescătoare a complexității.

1. Alternați cărți pare și impare.

2. Cartea jucată trebuie să aibă fie aceeași culoare, fie aceeași valoare cu cea din partea de sus a pachetului (ca în jocul de cărți denumit Optari).

3. Dacă ultimele două cărți de pe masă sînt de aceeași culoare, joacă o carte de la as la 7. Dacă sînt de culori diferite, joacă de la 7 la popă.

4. Dacă penultima carte a pachetului este roșie, joacă o carte de valoare egală sau mai mare. Dacă este neagră, joacă o carte egală sau mai mică.

5. Împarte la patru valoarea ultimei cărți. Dacă restul este 1, joacă pică: dacă este 2, joacă cupă; dacă este 3, joacă caro; dacă este 0, joacă treflă.

Dacă jucătorii au oarecare îndemînare matematică, regulile pot fi, firește, mai complicate. Totdeauna însă, bancherul trebuie să evalueze inteligent prieperea jucătorilor, astfel încă să-și mărească scorul, alegînd o regulă pe care un jucător o va descoperi probabil înaintea celorlalți.

Este permisă întocmirea unor reguli care să se refere și la jucători. De exemplu: „Dacă numele dumitale de familie are un număr impar de litere, joacă altă culoare decît a ultimei cărți; dacă e par, joacă aceeași culoare". Ar fi însă neleal din partea bancherului, dacă nu le-ar spune jucătorilor că a recurs la o regulă trucată în acest fel.

Cărțile din figură au fost jucate după o regulă simplă, nementionată aici. Cititorii se pot distra, încercînd s-o descurce înainte de a vedea explicația. De notat că primele șapte cărți urmează o schemă de alternare a culorilor. Aceasta se întîmplă frecvent într-un joc, ca și în istoria științei. Jucătorii au în minte o condiție care nu este realmente o parte a regulii, dar ei se țin de ea pînă cînd un experiment le dovedește că regula este mai simplă decît au bănuit sau că succesele lor sînt pur accidentale.

ADAOS

Deși multe jocuri conțin trăsături inductive, numai cîteva își justifică denumirea de jocuri ale inducției. Mă refer, de exemplu, la jocul Vapoare, un joc de copii cu creionul și hîrtia; Jotto și alte jocuri similare cu cuvinte; un joc de societate denumit „Plecarea în excursie". Acest din urmă joc mi-a fost relevat de I. Richard Lapidus, de la facultatea de fizică a Universității Columbia. Conducătorul jocului scrie pe o fișie de hîrtie o regulă care stabilește ce fel de obiecte pot fi luate într-o excursie. După aceea el spune „Am de gînd să iau un (o)_____", numind un obiect conform regulii. Ceilalți întreabă, la rîndul lor, „Pot să iau un (o)_____", iar conducătorul le spune dacă obiectul menționat de ei este sau nu permis. Cîștigă cel ce ghicește întîi regula. Regulile pot fi simple sau complicate. O regulă complicată: obiectul trebuie să înceapă cu aceeași literă ca ultima literă a numelui celui ce-l ia.

Bănuiesc că există multe posibilități pentru jocuri inductive neobișnuite, care nu au fost încă explorate, de exemplu ghicirea unor scheme vizuale ascunse. Închipuiți-vă o cutie de formă pătrată în care pot fi așezate 100 de plăcuțe pătrate. Dispunem de 600 de plăcuțe, colorate pe o față și negre pe cealaltă. Avem șase culori diferite, cîte 100 de plăcuțe din fiecare. Conducătorul așază în secret 100 de plăcuțe în cutie, construind un model care este strict ordonat (modelele pot varia de la o culoare continuă pînă la structuri foarte complicate). El întoarce cutia cu fața în jos pe masă, apoi o scoate, lăsînd plăcuțele în formație pătrată, cu fața neagră în sus. Jucătorii întorc rînd pe rînd cîte o singură plăcuță, la alegere. Cîștigătorul este primul care schițează o imagine corectă a întregului model. Jucătorii își schițează imaginea ipotetică individual, fără a-i lăsa pe ceilalți să le vadă și arătîndu-le numai conducătorului de joc.

RĂSPUNSURI

Regula secretă care determină ordinea cărților în fig. 158 este: „Joacă treflă sau caro, dacă ultima carte este pară; cupă sau pică, dacă este impară".

Se pot formula și alte reguli. Howard Givner, din Brooklyn, Gerald Wasserman, Woodmere, New York, și Federico Fink, din Buenos Aires, au sugerat-o pe următoarea: „Joacă orice carte care diferă ca valoare de ultima carte de pe masă". Este o regulă mai simplă, dar dacă este corectă, este greu de explicat cum s-a putut ajunge la ordonarea mai strictă a cărților, exprimată de prima regulă. Este posibil ca toți jucătorii să fi ghicit eronat prima regulă și să fi jucat în consecință, astfel că nici unul nu a jucat o carte care să se fi potrivit ca valoare cu ultima carte de pe masă. Firește, într-un joc efectiv, cărțile eliminate furnizează chei adiționale pentru a face o distincție între mai multe ipoteze rivale.

C.A. Griscom, din New York, a fost unul din cei cîțiva cititori care s-au gîndit la reguli extrem de complicate. Regula lui Griscom ia în considerare numai valorile cărților și presupune că asul este 14. Nu se admite nici un „ocol". Jucați o carte care este mai mare sau mai mică decît ultima de pe masă, dar dacă continuați această direcție adoptată de jucătorul precedent, trebuie să măriți rația. Dacă este imposibilă o rație mai mare, atunci i se dă valoarea 1.

O caracteristică esențială a metodologiei științei, este faptul că pot fi formulate mai multe ipoteze pentru a explica o mulțime de fapte date și că orice ipoteză poate fi oricînd lărgită pentru ca să cuprindă fapte noi care o contrazic. De exemplu, dacă cineva ar juca optarul de caro peste optarul de treflă, ultima regulă ar putea fi salvată, adăugînd că optarul de caro este o carte excepțională, care ar putea fi jucată oricînd. Mai multe ipoteze științifice (de exemplu modelul ptolemeic al universului) au fost dezvoltate pînă la un grad fantastic, prin eforturile de a le pune în concordanță cu noi fapte producătoare de încurcături, înainte de a fi cedat locul unei explicații mai simple.

Toate acestea fac să apară două întrebări profunde ale filozofiei științei: De ce este ipoteza cea mai simplă alegerea optimă? Cum se definește „simplitatea"?

Capitolul 16 ORIGAMI

Printre numeroasele aspecte ale civilizației japoneze, care au captivat recent interesul americanilor, este și origami, vechea artă japoneză a împăturirii hîrtiei. În Anglia, se pot găsi acum mai multe cărți despre acest subiect, în Manhattan înflorește un atelier de origami (înființat de doamna Harry C. Oppenheimer), iar în 1959 s-a făcut prima expoziție de hîrtie împăturită la New York, la Cooper Union's Museum for the Arts of Decoration.

Originile artei origami se pierd în negura începuturilor istoriei Orientului. Păsări din hîrtie împăturită apar ca modele pe kimonouri în tipăriturile japoneze din secolul al 18-lea, însă meșteșugul este cu multe secole mai vechi, atît în China, cît și în Japonia. Un timp, el a fost considerat ca o realizare a rafinatelor doamne japoneze; acum cei ce-l practică în primul rînd par să fie gheișele și copiii de școală. În ultimii 20 de ani, s-a înregistrat o creștere marcantă a interesului pentru origami în Spania și în America de Sud. Poetul și filozoful spaniol Miguel de Unamuno a contribuit la deschiderea drumului, scriind un tratat pe jumătate serios și pe jumătate ironic despre acest subiect și expunînd o împăturire de bază, care a condus la invenția unor noi și remarcabile construcții de origami.

Prin tradiție, origami este arta de a obține, prin împăturiri, animale, păsări, pești și alte obiecte reale, dintr-o singură coală de hîrtie, fără decupări, încleieri sau decorări. În varianta modernă, origami încalcă uneori aceste restricții, adăugînd cîte o mică intervenție a foarfecelor aici, o mică lipitură dincolo, niște ochi desenați cu creionul etc. Dar după cum farmecul poeziei orientale constă în a sugera cît mai mult cu putință, printr-un minim de cuvinte și într-un cadru de reguli rigide, tot astfel atractivitatea artei origami stă în realismul extraordinar, care se poate obține doar cu o foaie pătrată de hîrtie și două mîini îndemînatice. O foaie de hîrtie este îndoită după niște linii geometrice stranii. Dintr-o dată ea este

transformată într-o delicată piesă de sculptură semiabstractă miniaturală, atît de drăguță încît ne taie respirația.

Dat fiind aspectul geometric al împăturirii hîrtiei, nu trebuie să ne mire că mulți matematicieni au fost fascinați de această artă delicată și capricioasă. De exemplu, Lewis Carroll, care a predat matematica la Oxford, era un entuziast împăturitor de hîrtie. (Jurnalul său menționează prilejul cînd a învățat pentru prima dată, delectîndu-se, să împăturească o jucărie care scotea un pocnet puternic cînd era agitată în aer.) Literatura de matematică recreativă cuprinde numeroase broșuri și articole despre modele de hîrtie împăturită, din care fac parte și curioasele jucării numite flexagoane pe care le-am mai întîlnit.

Simplul act al împăturirii dă naștere unei probleme matematice interesante. De ce, dacă îndoim o foaie de hîrtie, obținem o linie dreaptă? Manualele de geometrie pentru școli medii citează uneori aceasta ca o ilustrare a faptului că două plane se intersectează după o linie dreaptă, dar este limpede că nu-i așa, deoarece părțile unei coli îndoite sînt plane paralele. Iată aici explicația adecvată, așa cum o dă L. R. Chase, în „The American Mathematical Monthly" iunie-iulie, 1940.

„Fie p și p' cele două puncte ale hîrtiei, care ajung să coincidă prin procesul de îndoire; atunci orice punct a al liniei după care îndoim este echidistant de p și de p', deoarece segmentele ap și ap'

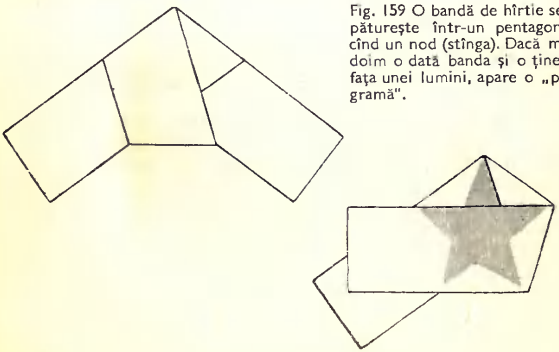


Fig. 159 O bandă de hîrtie se împătureşte într-un pentagon, făcînd un nod (stînga). Dacă mai îndoim o dată banda şi o ţinem în faţa unei lumini, apare o „pentagramă".

coincid. De aceea, linia de îndoire, cuta, fiind locul geometric al acestor puncte, a este perpendiculară pe mijlocul segmentului pp'''.

Împăturirea poligoanelor regulate, care nu face parte din origami clasic, este un exerciţiu stimulator pentru elevi. Triunghiul echilateral, pătratul, hexagonul regulat şi octogonul regulat sînt destul de uşor de împăturit, însă pentagonul prezintă dificultaţi deosebite. El se obţine cel mai simplu făcînd un nod cu o bandă de hîrtie şi presîndu-l (fig. 159, stînga). Modelul ascunde un element interesant. Dacă mai îndoim un capăt al benzii şi ţinem nodul în faţa unei lumini puternice (fig. 159, dreapta,) vedem celebra pentagramă a magiei medievale.

Hîrtia poate fi şi astfel îndoită încît să dea tangente care au ca înfăşurătoare diverse curbe de ordin inferior. Parabola se obţine cu deosebită uşurinţă. Marcăm întîi un punct situat la cîţiva ţoli de o margine a hîrtiei, apoi îndoim hîrtia de vreo douăzeci de ori în diverse locuri, asigurîndu-ne că, la fiecare îndoire, marginea se aşază astfel, încît să treacă prin punctul marcat. Figura 160 ne

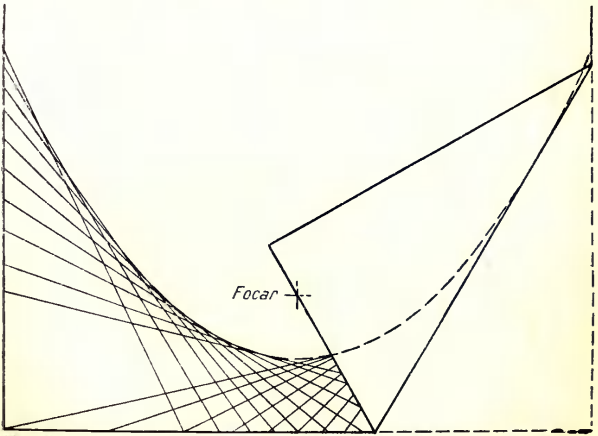


Fig. 160 Tangentele la o parabolă se obţin îndoind hîrtia, astfel ca marginea ei de jos să treacă prin focar.

arată iluzia pregnantă a parabolei pe care o obținem. Punctul este focarul curbei, marginea hîrtiei este directoarea, iar fiecare îndoitură a hîrtiei este tangentă la curbă. Se vede ușor că această metodă de îndoire ne dă siguranța că orice punct al curbei este echidistant de focar și de directoare, o proprietate definitorie a parabolei.

Cu această metodă de îndoire a hîrtiei se înrudește îndeaproape o interesantă problemă de calcul elementar. Să presupunem că avem o coală de hîrtie de 8×11 țoli. O îndoim în așa fel încît vîrful A (fig. 161) să atingă marginea din stînga. Mișcînd vîrful în sus și în jos pe margine și presînd hîrtia în fiecare poziție, obținem tangentele la o parabolă avînd focarul în A. În ce punct de pe marginea din stînga a hîrtiei trebuie plasat vîrful A, astfel încît o cută care intersectează marginea de jos să fie cît mai scurtă? Care este lungimea ei? Cititorii care nu sînt familiarizați cu calculul se pot distra studiind următoarea variantă mai simplă. Dacă lățimea hîrtiei este redusă la 7,68 țoli, iar vîrful este așezat la 5,76 țoli deasupra bazei, care va fi lungimea exactă a tangentei minime?

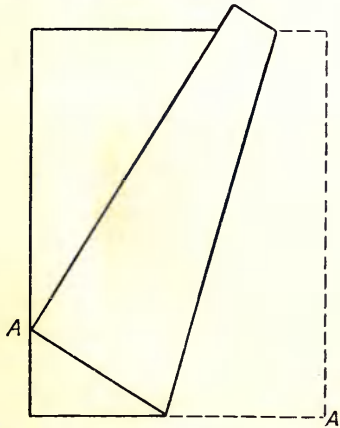


Fig. 161 O problemă de calcul rezolvabilă prin metoda împăturirii hîrtiei.

Şi acum, fără să mă scuz, părăsesc celelalte aspecte matematice ale împăturirii hîrtiei, pentru a trece la explicaţia modului în care se obţine ceea ce este, în multe privinţe, mai remarcabil dintre toate construcţiile origami: pasărea care bate din aripi. Acest obiect este un lucru frumos şi o piesă mecanică magistrală. Invităm pe cititor să ia un pătrat de hîrtie (hîrtia de ambalaj obişnuită e foarte bună) şi să înveţe complicatele împăturiri.

Pătratul cu latura de 8 ţoli este foarte potrivit (unii preferă să facă o pasăre miniaturală dintr-o bancnotă de un dolar, îndoită în prealabil ca să dea un pătrat). Îndoiţi hîrtia după cele două diagonale şi presaţi cutele; întoarceţi (fig. 162, *1*) astfel încît „cutele vale" să devină „cute munţi". (În desene, văile sînt reprezentate prin linii întrerupte, iar munţii prin linii continue.)

Îndoiţi hîrtia la jumătate, desfaceţi, îndoiţi după celălalt sens şi desfaceţi iarăşi. Aceasta adaugă cele două văi reprezentate în fig. 162, *2*.

Îndoiţi astfel încît două laturi vecine să se întîlnească deasupra unei diagonale *(3)*. Desfaceţi, apoi procedaţi la fel în toate cele trei vîrfuri. Hîrtia va prezenta acum urmele din *4*. (Remarcaţi că diversele urme marcate pe hîrtie formează un octogon regulat în centrul pătratului.)

Pasul următor este extrem de greu de descris, deşi se efectuează uşor, o dată ce i-aţi prins secretul. Observaţi cele patru segmente vale scurte, indicate prin săgeţi în fig. 162, *4*. Strîngeţi între degete aceste segmente, astfel încît să devină munţi. Mijloacele laturilor (notate în *4* cu *A*, *B*, *C* şi *D*) se împing spre interior. Rezultatul este arătat în *5*. Prin aceasta se ridică în sus vîrfurile pătratului (notate cu *J*, *K*, *L* şi *M*), astfel încît vederea oblică a modelului se prezintă acum ca în 6.

Dacă toate îndoiturile s-au făcut corect (asiguraţi-vă că centrul pătratului este împins cît se poate în jos), va fi acum uşor să aducem împreună toate cele patru vîrfuri, aşa cum se vede în 7. Presaţi modelul, făcînd ca laturile să se împreuneze, ca în *8*.

Partea *A* (în *8*) se îndoaie în jos în lungul liniei *B*. Întoarceţi hîrtia şi procedaţi la fel de partea cealaltă. Hîrtia arată acum ca în *9*.

Partea *A* (în *9*) este îndoită spre stînga în lungul liniei verticale *B*. Întoarceţi modelul şi faceţi la fel de partea cealaltă. Rezultatul este ilustrat în *10*.

Partea *A* se îndoaie în sus (în *10*) după linia *B*. Întoarceţi modelul şi repetaţi de partea cealaltă. Ţineţi triunghiul isoscel rezultat

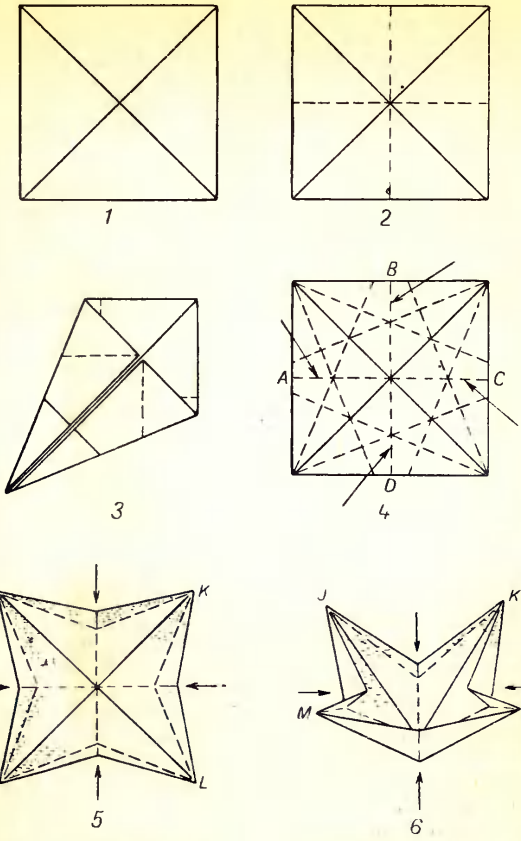
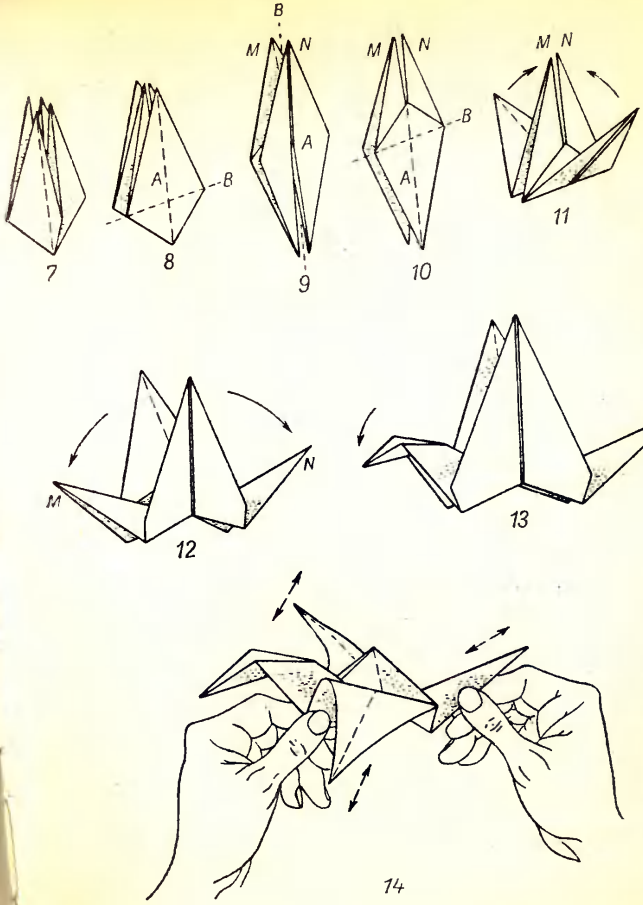


Fig. 162 Cum obţinem pasărea japoneză care bate din aripi.


B
M
N
A
B
7
8
9
10
11
12
13
14

cu vîrful în sus *(11)*. Pentru etapele rămase este mai bine să ţinem modelul în aer decît să-l lăsăm pe masă.

Trageţi de *M* cum se vede în *12* şi presaţi hîrtia la bază. Faceţi la fel cu *N*. Acum trageţi în jos vîrful lui *M* şi petreceţi-l; presaţi apoi pentru a obţine capul păsării *(13)*.

Daţi formă aripilor (fără a le îndoi), astfel încît de la bază spre vîrf curbura lor să meargă uşor în afară şi înainte. Ţineţi pasărea ca în *14*. Dacă trageţi uşor de coadă, aripile vor filfîi graţios.

Cîteva din animalele origami pot executa mişcări: un peşte care deschide gura, o broască ce sare atunci cînd îi atingem spatele etc. Traducătorul lui Unamuno ne povesteşte că scriitorul spaniol avea obiceiul să facă astfel de animale în timp ce-şi sorbea cafeaua de după-masă într-o cafenea din Salamanca. Nu trebuie să ne mire că ştrengarii de pe stradă stăteau cu ochii holbaţi şi cu nasurile lipite de vitrine!

ADAOS

De cînd a apărut acest capitol în „Scientific American", doamna H.C. Oppenheimer a început să publice „The Origamian", o revistă consacrată împăturilor de hîrtie. Ea continuă să conducă Centrul de origami din New York, 26 Gramercy Park South, New York 3, şi să promoveze pe nenumărate căi arta hîrtiei împăturite.

În fiecare an se scriu noi cărţi despre împăturirea hîrtiei şi multiple construcţii origami sînt puse acum în vînzare în Statele Unite. *Encyclopaedia Britannica* a hotărît să adauge un articol despre origami la viitoarea ei ediţie. Numeroşi educatori din grădiniţe şi învăţători încep să descopere această artă, însă poate că cei mai mulţi mai au rezerve faţă de ea, deoarece o pun în legătură cu practica sterilă, atît de larg răspîndită în grădiniţele de copii de la începutul secolului, de a împături modele dinainte elaborate din hîrtii colorate. (Această practică a fost introdusă de pedagogul german Friedrich Froebel, şi multe cadre didactice din S.U.A. — au căzut sub influenţa sa dăunătoare.)

Pasărea care dă din aripi a fost descrisă pentru prima dată în engleză în cartea lui Gaston Tissandier, *Half Hours of Scientific Amusement*, Londra, 1890 (traducere din l. franceză după o carte

apărută în 1889). Există o cale mai simplă de a construi pasărea decît cea pe care am ales-o, dar ea este mult mai greu de explicat în cuvinte.

Descrierea animalelor pe care Unamuno le obținea într-un restaurant din Spania a apărut în traducerea engleză a cărții sale *Eseuri și Monologuri*, Knopf, 1925. Într-o carte despre prietenul său Unamuno, Ortega y Gasset ne povestește o întîmplare cînd filozoful a făcut cîteva animale de hîrtie pentru un băiețaș, care l-a întrebat: „dar păsările știu să vorbească?" Această întrebare a inspirat unul dintre cele mai cunoscute poeme ale lui Unamuno. Eseul umoristic despre hîrtia împăturită este cuprins în *Amor y pedagogia*, Barcelona, 1902. Un articol mai important al lui Unamuno asupra împăturirilor de hîrtie a apărut în revista argentiniană „Caras y caretas", 1 martie, 1902.

Akira Yoshizawa, din Tokio, este considerat drept cel mai mare maestru în viață al artei origami. El a scris mai multe cărți despre acest subiect și numeroase articole pentru ziare și reviste japoneze. În America de Sud, cele mai bune manuale de origami au fost scrise de Vicente Solórzano Sagredo, un dentist din Buenos Aires. Există o vastă literatură consacrată acestei arte, atît în japoneză, cît și în spaniolă.

RĂSPUNSURI

Problema cu coala de hîrtie îndoită se rezolvă cel mai bine ca un calcul de maxim și minim. Dacă x este distanța de la vîrful A (vîrful petrecut deasupra) pînă la punctul unde cuta hîrtiei taie marginea de jos, atunci $8 - x$ va fi distanța care rămîne pe marginea de jos. Distanța de la vîrful din stînga jos pînă la punctul unde A atinge marginea din stînga va fi $4\sqrt{x-4}$, distanța de la vîrful A pînă la punctul unde cuta hîrtiei intersectează marginea din dreapta va fi $2x/\sqrt{x-4}$, iar cuta însăși va avea lungimea $\sqrt{x^3}/\sqrt{x-4}$. Dacă derivata acestei ultime funcții este egalată cu zero, x va avea valoarea 6. De aceea, vîrful atinge marginea laterală într-un punct distanțat cu $4\sqrt{2}$ deasupra bazei, iar lungimea cutei va fi $6\sqrt{3}$, adică ceva mai mult de 10,392 țoli.

O trăsătură interesantă a acestei probleme constă în faptul că, oricare ar fi lățimea hîrtiei, îndoitura minimă care intersectează marginea de jos se obține astfel încît x să fie exact la trei sferturi din lățimea hîrtiei. Această lungime de trei sferturi, înmulțită cu rădăcina pătrată a lui 3, dă lungimea cutei. Dacă valoarea de minimizat este aria părții îndoite deasupra, atunci x este egal totdeauna cu 2/3 din lățimea hîrtiei.

Lungimea cutei în problema mai simplă (în care lățimea hîrtiei este 7,68, iar colțul este îndoit într-un punct situat cu 5,76 deasupra bazei) are lungimea exactă de 10 țoli.

Capitolul 17 ÎMPĂRȚIREA PĂTRATULUI ÎN PĂTRATE DIFERITE

Poate fi un pătrat subîmpărțit în pătrate mai mici, toate diferite între ele ca mărime? S-a crezut multă vreme că această problemă imens de grea este de nerezolvat, dar acum ea a fost soluționată printr-o transferare în teoria rețelelor electrice și printr-o retransferare în geometria plană. Aici, William T. Tutte, conferențiar de matematică la Universitatea din Toronto ne prezintă o captivantă dare de seamă asupra felului în care el și trei studenți de la Universitatea Cambridge au reușit pînă la urmă să rezolve problema.

Aceasta este relatarea unei investigații matematice, efectuate în anii 1936—1938, de către patru studenți de la Trinity College, Cambridge. Unul a fost autorul acestui articol. Altul a fost C.A. B. Smith, actualmente specialist în genetică statistică la Universitatea din Londra. El este binecunoscut și ca autor în domeniul teoriei jocurilor, precum și în problema monedei false. Altul a fost A.H. Stone care face acum la Manchester cercetări în domenii mai puțin cunoscute ale topologiei mulțimilor de puncte. El este unul dintre inventatorii flexagoanelor. Al patrulea a fost R.L. Brooks. El a părăsit acum cariera academică, dar i-a rămas entuziasmul pentru matematica recreativă, și o importantă teoremă din teoria colorării grafelor îi poartă numele. Acești patru studenți se autonumeau cu o caracteristică modestie „Membri importanți" ai Societății de matematică de la Trinity.

În 1936, în literatură existau puține referințe la problema decupării unui dreptunghi în pătrate inegale. Astfel, se știa că un dreptunghi cu laturile 32 și 33 unități poate fi secționat în nouă pătrate având laturile 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 și 18 (fig. 163). Pe Stone l-a intrigat o formulare din cartea lui Dudeney, *Canterbury Puzzles*, din care părea să reiasă imposibilitatea de a tăia un *pătrat* în pătrate mai mici inegale. El a încercat să obțină demon-

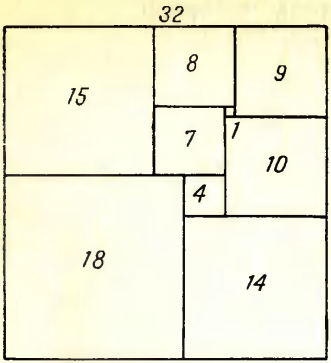


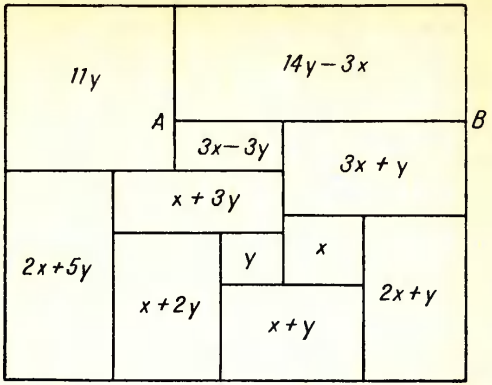
Fig. 163

strația de imposibilitate, dar fără succes. În schimb, el a descoperit o secționare a dreptunghiului de laturi 176 și 177 în 11 pătrate inegale (fig. 165.)

Acest succes parțial a înflăcărat imaginația lui Stone și a celor trei prieteni ai săi, și, curînd, ei au început să consacre mult timp construcției și discutării decupărilor dreptunghiurilor în pătrate. Ei au numit „perfect" orice dreptunghi care se putea tăia în pătrate inegale. După mulți ani, a fost introdus termenul de „dreptunghi carabil" pentru a descrie orice dreptunghi decupabil în două sau mai multe pătrate, nu neapărat inegale.

Construirea dreptunghiurilor perfecte s-a dovedit a fi destul de ușoară. Metoda folosită a fost următoarea. Schițăm întîi un dreptunghi tăiat în dreptunghiuri, ca în fig. 164. Ne închipuim apoi că desenul este o reprezentare proastă a unui dreptunghi carabil, în care micile dreptunghiuri sînt în realitate pătrate, și determinăm cu ajutorul algebrei elementare, care trebuie să fie mărimile relative ale pătratelor, în virtutea acestei ipoteze. Astfel, în fig. 164, am notat laturile a două pătrate mici, vecine, cu x și y. Putem spune apoi că latura pătratului situat dedesubt este $x + y$, apoi că latura pătratului din stînga este $x + 2y$ etc. Procedînd astfel, obținem formulele din fig. 164 pentru laturile celor 11 pătrate mici. Aceste formule fac ca pătratele să se potrivească exact unul lîngă

Fig 164



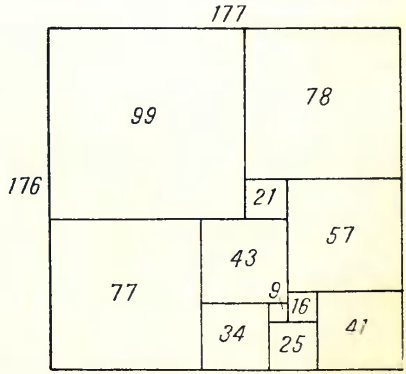


Fig. 165

altul, cu o excepție: în lungul segmentului AB. Dar putem face ca ele să se potrivească și după AB, alegînd pe x și y astfel încît să

satisfacă ecuația $(3x + y) + (3x - 3y) = (14y - 3x)$, adică $16y = 9x$. Corespunzător, punem $x = 16$ și $y = 9$. Aceasta ne dă dreptunghiul perfect din fig. 165, care este cel găsit pentru prima oară de Stone.

Cîteodată această metodă dădea valori negative pentru laturile unora dintre pătratele mici. S-a constatat însă că astfel de pătrate negative pot fi totdeauna convertite în pătrate pozitive, prin mici modificări ale desenului inițial. De aceea, ele nu au cauzat complicații. În unele dintre diagramele mai complicate, s-a dovedit necesar să se ia ca punct de plecare trei pătrate necunoscute, de laturi x, y și z, urmînd a rezolva două ecuații liniare în loc de una la sfîrșitul calculelor algebrice. Cîteodată, dreptunghiul carabil obținut la sfîrșit nu era perfect, încercarea fiind clasificată ca un eșec. Din fericire, aceasta nu s-a întîmplat prea des. Am înregistrat numai dreptunghiurile perfecte „simple", adică cele care nu conțin dreptunghiuri mai mici. De exemplu, dreptunghiul perfect obținut în fig. 163, dacă așezăm un nou pătrat component pe latura de 32 din partea superioară, nu este simplu și nu l-am introdus în catalogul nostru.

În primul stadiu al cercetării, am construit un mare număr de dreptunghiuri perfecte în care numărul de pătrate componente era cuprins între 9 și 26. În forma finală a fiecărui dreptunghi, laturile pătratelor componente erau reprezentate ca întregi fără factori comuni. Firește, speram cu toții că dacă vom construi suficiente dreptunghiuri perfecte prin această metodă vom obține eventual unul care să fie un „pătrat perfect". Dar pe măsură ce se lungea lista dreptunghiurilor perfecte, speranța scădea și producția noastră corespunzător a scăzut.

Inspectarea catalogului alcătuit de noi a dezvăluit unele fenomene foarte curioase. Am clasificat dreptunghiurile după „ordinul" lor, adică după numărul de pătrate componente. Am remarcat tendința unor numere care reprezentau laturile de a se repeta în fiecare ordin. Mai mult, semiperimetrul unui dreptunghi de un ordin reapărea adesea de mai multe ori ca latură în ordinul următor. De exemplu, utilizînd informația completă de care dispunem acum, constatăm că patru dintre cele șase dreptunghiuri perfecte simple de ordinul 10 au semiperimetrul 209, iar cinci dintre cele 22 de

dreptunghiuri perfecte simple de ordinul 11 au latura 209. Am avut multe discuții despre această „lege a recurenței inexplicabile", dar ele nu au dus la o explicație satisfăcătoare.

În stadiul următor al cercetării, am abandonat experimentul în favoarea teoriei. Am încercat să reprezentăm dreptunghiurile carabile prin diagrame de diferite feluri. Ultima dintre aceste diagrame, introdusă de Smith, a fost realmente un mare pas înainte. Ceilalți trei cercetători au denumit-o diagrama Smith. Dar Smith a obiectat împotriva acestei denumiri, susținînd că diagrama sa nu era decît o modificare minoră a altora anterioare. Oricum ar fi, diagrama lui Smith a făcut ca problema noastră să devină dintr-o dată o parte a teoriei rețelelor electrice.

Figura 166 prezintă un dreptunghi perfect, împreună cu respectiva diagramă Smith. Orice segment de dreaptă orizontal din dese-

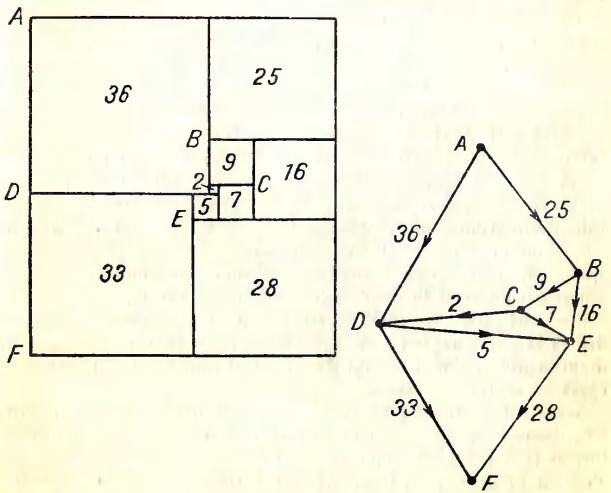


Fig. 166

nul dreptunghiului este reprezentat în diagrama Smith printr-un punct sau „terminal". În diagrama Smith, terminalul se situează pe o continuare spre dreapta a segmentului orizontal corespunzător din dreptunghi. Orice componentă pătrată a dreptunghiului este mărginită sus și jos de două segmente orizontale. În conformitate cu aceasta, ea este reprezentată în diagramă printr-o linie, sau un „fir", care unește cele două terminale corespunzătoare. Să ne imaginăm un curent electric care trece prin fiecare fir. Intensitatea curentului este numeric egală cu latura pătratului corespunzător, iar sensul este cel de la terminalul reprezentînd segmentul orizontal de sus spre terminalul care-l reprezintă pe cel de jos.

Terminalele corespunzătoare laturilor orizontale de sus și de jos ale dreptunghiului le putem numi polul pozitiv și, respectiv, cel negativ în rețeaua electrică.

În mod destul de surprinzător, curenții electrici descriși prin regula de mai sus se supun legilor lui Kirchhoff referitoare la trecerea curentului printr-o rețea, cu condiția de a considera că fiecare fir are rezistența 1. Prima lege a lui Kirchhoff spune că, cu excepția polului, suma algebrică a curenților care converg spre un terminal este nulă. Aceasta corespunde faptului că suma laturilor pătratelor mărginite în partea de jos de un segment orizontal dat este egală cu suma laturilor pătratelor mărginite sus de același segment, firește dacă acest segment nu este una dintre laturile orizontale ale dreptunghiului. Legea a doua spune că suma algebrică a curenților în orice circuit este nulă. Aceasta este echivalent cu a spune că, dacă descriem circuitul, rețeaua corespunzătoare unei schimbări de nivel în dreptunghi trebuie să fie nulă.

Curentul total care intră în rețea la polul pozitiv sau care iese din ea la polul negativ este, evident, egal cu latura orizontală a dreptunghiului, iar diferența de potențial dintre cei doi poli este egală cu latura verticală.

Această descoperire a analogiei electrice a fost importantă pentru noi, deoarece a legat problema noastră de o teorie bine stabilită. Putem face acum împrumuturi de la teoria rețelelor electrice și să obținem formule pentru curenți într-o diagramă Smith generală, precum și mărimile pătratelor componente corespunzătoare. Prin-

cipalele rezultate ale acestor împrumuturi pot fi sintetizate astfel. Fiecărei rețele electrice îi este asociat un număr, calculat pe baza structurii rețelei, indiferent de perechea de terminale pe care o alegem ca poli. Am numit acest număr complexitatea rețelei. Dacă unitățile de măsură pentru dreptunghiul corespunzător sînt astfel alese încît latura orizontală să fie egală cu complexitatea, atunci laturile pătratelor componente au toate valori întregi. Mai mult, latura verticală este egală cu complexitatea unei alte rețele, care se obține din prima prin identificarea celor doi poli.

Numerele care dau latura dreptunghiului și pătratele sale componente în acest sistem de măsură au fost numite laturi „complete" și elemente „complete" ale dreptunghiului. Pentru unele dreptunghiuri elementele complete au un factor comun mai mare decît 1. În orice caz, împărțirea prin factorul comun dă laturile și elementele „reduse". Laturile și elementele reduse au fost cele pe care le-am trecut în catalogul nostru.

Rezultatele implică faptul că, dacă două dreptunghiuri carabile corespund la rețele de aceeași structură, diferind numai prin alegerea polilor, atunci laturile orizontale complete sînt egale. Mai departe, dacă două dreptunghiuri au rețele care capătă aceeași structură cînd identificăm cei doi poli ai fiecăreia, atunci cele două laturi verticale sînt egale. Aceste două fapte au explicat toate cazurile de „recurență inexplicabilă" pe care le întîlnisem.

Descoperirea diagramei Smith a simplificat procedura pentru construirea și clasificarea dreptunghiurilor carabile simple. A fost o chestiune simplă să întocmim lista tuturor rețelelor electrice admisibile avînd pînă la 11 fire și să calculăm toate dreptunghiurile carabile corespunzătoare. Am constatat atunci că nu există dreptunghiuri perfecte mai mici de ordinul 9 și că sînt numai două de ordinul 9 (fig. 163 și 166). Erau șase dreptunghiuri perfecte de ordinul 10 și respectiv 22 de ordinul 11. Catalogul a progresat atunci, deși mai încet, parcurgînd ordinul 12 (67 de dreptunghiuri perfecte simple) și a pătruns în ordinul 13.

A fost o recreație plăcută să construim dreptunghiuri perfecte, corespunzătoare la rețele cu un înalt grad de simetrie. Am considerat, bunăoară, rețeaua definită de un cub, în care vîrfurile erau

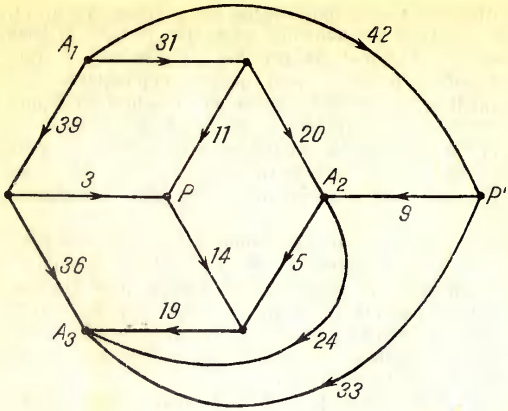


Fig. 167

terminale iar muchiile fire electrice. Aceasta nu ne-a dat dreptunghiuri perfecte. Dacă însă, se adăuga un fir diagonal la o față și rețeaua era apoi făcută plană, se obținea diagrama Smith din fig. 167, împreună cu dreptunghiul perfect corespunzător din fig. 168. Acesta era deosebit de interesant, deoarece elementele sale reduse sînt neobișnuit de mici pentru ordinul 13. Factorul comun al elementelor complete este 6. Acest dreptunghi i-a plăcut atît de mult lui Brooks, încît a făcut din el un joc de traforaj, în care piesele erau pătratele componente.

În acest stadiu, mama lui Brooks a făcut descoperirea-cheie a întregii cercetări. Ea a umblat cu jocul lui Brooks și a reușit, din întîmplare, să așeze piesele în așa fel încît să formeze un dreptunghi. Dar acesta nu era dreptunghiul carabil pe care-l decupase Brooks! Acesta s-a întors la Cambridge pentru a raporta existența a două dreptunghiuri perfecte diferite, avînd aceleași laturi reduse și aceleași elemente reduse. Recurența inexplicabilă se răzbuna!

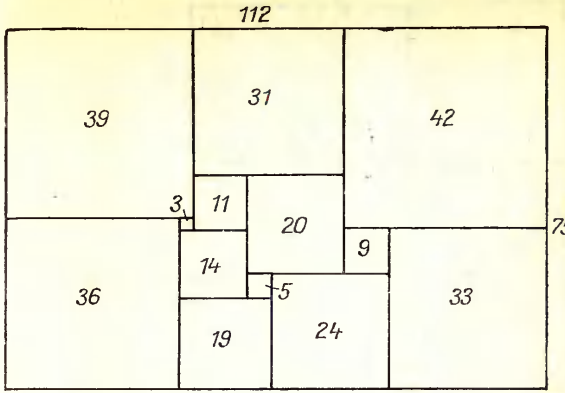


Fig. 168

Membrii importanţi s-au întîlnit într-o sesiune extraordinară urgentă.

Ne întrebasem cîteodată dacă este posibil ca dreptunghiuri perfecte diferite să aibă aceeaşi formă. Ne-ar fi plăcut să obţinem două dreptunghiuri din acestea, cu elemente reduse necomune, ca să ajungem astfel la un pătrat perfect prin construcţia reprezentată în fig. 169. Regiunile haşurate din acest desen reprezintă cele două dreptunghiuri perfecte. Se adaugă apoi două pătrate inegale, pentru a obţine pătratul perfect mare. Dar pînă atunci nu apăruseră dreptunghiuri de aceeaşi formă în catalogul nostru şi ajunsesem, de nevoie, să credem că fenomenul ar fi fost imposibil. Descoperirea doamnei Brooks ne-a dat noi speranţe, chiar dacă dreptunghiurile ei nu aveau, în cazul cel mai defavorabil, elemente reduse comune.

La sesiunea extraordinară, s-au purtat multe discuţii pătimaşe. Pînă la urmă, membrii s-au calmat suficient pentru a desena diagramele Smith ale celor două dreptunghiuri. Examinarea acestora a lămurit curînd înrudirea dintre ele.

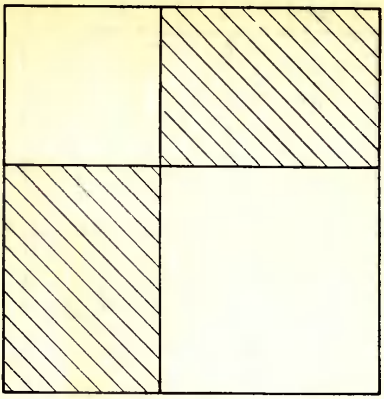


Fig. 169

Al doilea dreptunghi este redat în fig. 170, iar diagrama sa Smith, în fig. 171. Este evident că rețeaua din fig. 171 poate fi obținută din cea din fig. 167 prin identificarea terminalelor p și p'. Deoarece, din întîmplare, p și p' au același potențial electric în fig. 167, această operație nu determină modificări ale curenților în firele individuale, nici în curentul total și nici în diferența de potențial dintre poli. Avem, astfel, o explicație electrică simplă a faptului că cele două dreptunghiuri au aceleași laturi reduse și aceleași elemente reduse.

Dar de ce au p și p' același potențial în fig. 167? Înainte de a se termina, sesiunea extraordinară a obținut un răspuns și la această întrebare. Explicația rezidă în faptul că rețeaua poate fi descompusă în trei părți care se întîlnesc numai în polii A_1 și A_2 și în terminalul A_3. Una dintre aceste părți constă numai din firul care unește A_2 și A_3. A doua parte este formată din cele trei fire care se întîlnesc în p', iar a treia este constituită din cele nouă fire rămase. Partea a treia are o triplă simetrie de rotație, cu centrul în p. Mai mult, curentul intră în această parte a rețelei sau iese din ea numai în punctele A_1, A_2 și A_3, care sînt echivalente față de simetrie. Aceasta este suficient pentru a ne da siguranța că aplicînd indife-

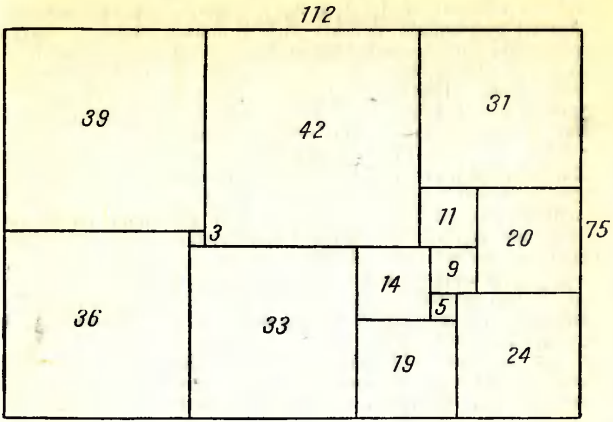


Fig. 170

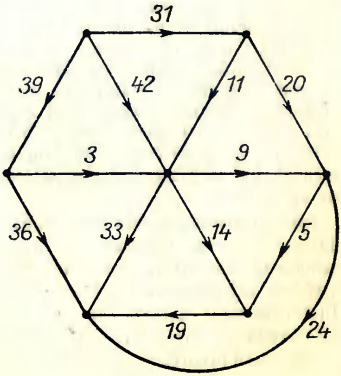


Fig. 171

rent ce potențiale în A_1, A_2 și A_3, potențialul în p va fi media lor. Aceeași argumentare, aplicată părții a doua a rețelei, ne arată că potențialul lui p' trebuie, de asemenea, să fie media potențialelor din A_1, A_2 și A_3. De aceea, p și p' au același potențial, indiferent de potențialele aplicate în A_1, A_2 și A_3, și, în particular, ele au același potențial cînd A_1 și A_2 sînt polii rețelei complete, iar potențialul lui A_3 este determinat prin legile lui Kirchhoff.

Următorul pas înainte a fost făcut întîmplător de autorul rîndurilor de față. Tocmai izbutisem să explicăm în întregime descoperirea doamnei Brooks, în baza unei proprietăți simple a rețelelor simetrice. Aveam impresia că trebuie să fie posibilă utilizarea acestei proprietăți pentru a construi alte exemple de perechi de dreptunghiuri perfecte cu aceleași elemente reduse. Nu aș fi putut să explic cum urma să ne folosească aceasta pentru scopul nostru principal, de a construi un pătrat perfect sau de a-i demonstra imposibilitatea, dar socoteam că trebuie să explicăm posibilitățile noilor idei, înainte de a le părăsi.

Problema constă în a înlocui partea a treia a rețelei din fig. 167 printr-o altă rețea cu simetrie rotațională triplă în jurul unui terminal central. Aceasta însă se poate face numai cu restricții severe, pe care le vom explica acum.

Se poate arăta că diagrama Smith a unui dreptunghi carabil este totdeauna planară, adică poate fi desenată în plan fără fire intersectate. Și desenul se poate executa totdeauna în așa fel încît nici un circuit să nu despartă cei doi poli. Există și o teoremă reciprocă, care spune că, dacă o rețea electrică de rezistențe unitare poate fi astfel desenată în plan, atunci ea este diagrama Smith a unui dreptunghi carabil. Nu este cazul să acordăm spațiu în această carte unor demonstrații riguroase ale teoremelor de mai sus. Nu ar fi nici măcar corect sub raport istoric; cei patru cercetători o scoteau la capăt fără demonstrații riguroase, pînă în momentul cînd au început să-și pregătească pentru publicare articolul de specialitate.

Însă nu totdeauna este recomandabil să desconsiderăm astfel rigoarea în cursul unei cercetări matematice. Într-o cercetare care urmărește demonstrația teoremei celor patru culori, de exemplu, o astfel de atitudine ar fi, și este adesea în realitate, dezastruoasă. Însă cercetarea noastră era în mare măsură experimentală, iar rezultatele ei experimentale erau dreptunghiuri perfecte. Metodele noastre erau justificate, pentru timpul de atunci, prin dreptunghiu-

rile pe care le obţineam, chiar dacă teoria lor nu fusese precis elaborată.

Dar să revenim la fig. 167 şi la înlocuirea părţii a treia printr-o nouă reţea simetrică de centru p. Reţeaua completă astfel obţinută trebuie nu numai să fie planară, ci şi să rămînă planară după ce identificăm p şi p'.

După cîteva încercări, am găsit două reţele strîns înrudite, care satisfăceau aceste condiţii. Diagramele Smith corespunzătoare sînt date în fig. 172 şi 173. După cum ne aşteptam, fiecare diagramă permitea identificarea lui p şi a lui p', dînd astfel naştere la două dreptunghiuri carabile cu aceleaşi elemente reduse. Însă toate cele patru dreptunghiuri aveau aceleaşi laturi reduse, şi acest rezultat era cu totul surprinzător.

În esenţă, noua descoperire arăta că dreptunghiurile corespunzătoare fig. 172 şi 173 au aceeaşi formă, deşi nu toate elementele lor reduse sînt aceleaşi. Curînd s-a găsit pentru aceasta o explicaţie teoretică simplă. Cele două reţele au aceeaşi structură, indiferent de alegerea polilor şi, de aceea, dreptunghiurile au aceeaşi latură orizontală completă. Mai mult, reţelele rămîn identice atunci cînd polii se contopesc, din care cauză cele două dreptunghiuri au aceeaşi latură verticală. Simţeam însă că această explicaţie nu merge destul de profund, deoarece nu se referea şi la simetria de rotaţie.

Am convenit ca noul fenomen să-l numim echivalenţa „rotor-stator". El era totdeauna asociat cu o reţea care putea fi descompusă în două, „rotorul" şi „statorul", cu următoarele proprietăţi. Rotorul avea simetrie de rotaţie, terminalele comune rotorului şi statorului erau toate echivalente faţă de simetria rotorului, iar polii erau terminali ai statorului. În fig. 172, de exemplu, statorul este compus din cele trei fire care leagă p' de A_1, A_2 şi A_3 şi din firul care leagă A_2 de A_3. Se putea obţine apoi o a doua reţea, printr-o operaţie denumită „inversarea" rotorului. În cazul unei figuri bine desenate, aceasta se putea explica în sensul unei oglindiri a rotorului într-o dreaptă care trece prin centrul său. Astfel, plecînd de la fig. 172, putem reflecta rotorul în segmentul pA_3 obţinînd astfel reţeaua din fig. 173.

După ce au studiat cîteva exemple de echivalenţă rotor-stator, cercetătorii s-au convins că inversarea rotorului nu producea diferenţe la laturile complete ale dreptunghiului şi nici la curenţii din firele statorului. În schimb, se puteau modifica curenţii din rotor. Demonstraţii satisfăcătoare ale acestor rezultate au fost obţinute abia într-o etapă mai tîrzie.

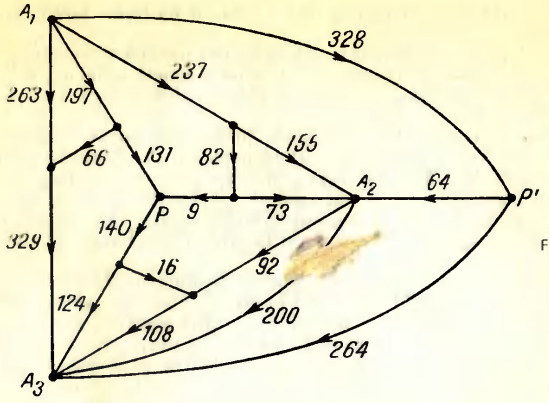


Fig. 172

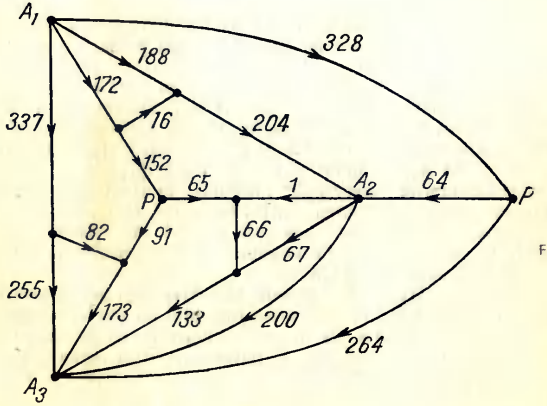


Fig. 173

S-a constatat că echivalența rotor-stator nu este prea îndeaproape înrudită cu fenomenul descoperit de doamna Brooks. Era mai curînd altul, asociat cu rețelele avînd o parte cu simetrie de rotație. Importanța descoperirii doamnei Brooks pentru noi a fost faptul că ne-a condus la studiul unor astfel de rețele.

Se pune acum o întrebare destul de încurcată. Care este numărul minim posibil de elemente comune într-o pereche rotor-stator de dreptunghiuri perfecte? Cele din fig. 172 și 173 au șapte elemente comune, dintre care trei corespund la curenți în rotor. Același rotor cu un stator constînd dintr-un singur fir, A_2A_3, dă două dreptunghiuri perfecte de ordinul 16, cu patru elemente comune. Utilizînd un stator de un singur fir, nu pare să existe un motiv teoretic pentru care să nu putem obține o pereche de dreptunghiuri perfecte avînd în comun numai un singur element, corespunzător statorului. Dar ne-am dat seama că dacă am putea face aceasta, am obține un pătrat perfect. Căci la rotorii cu simetrie triplă pe care îi studiam, un stator de un singur fir reprezenta totdeauna un element-colț al fiecărui dreptunghi corespunzător. De la două dreptunghiuri perfecte avînd în comun numai un vîrf ne putem aștepta să obținem un pătrat perfect, prin construcția ilustrată în fig. 174. Aici regiu-

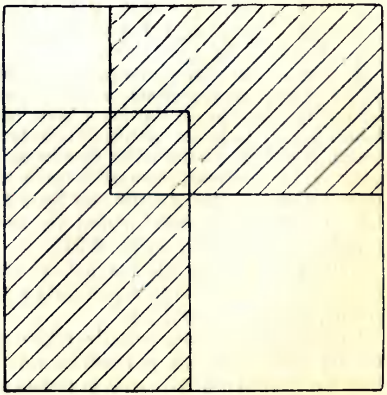


Fig. 174

nile haşurate reprezintă cele două dreptunghiuri, iar pătratul în care se suprapun este elementul de colţ comun.

Firește, ne-am apucat să calculăm perechi rotor-stator. Am făcut rotorii cît puteam de simpli, în parte pentru a economisi muncă, iar în parte în speranţa că vom obţine un pătrat perfect cu elemente reduse mici. Însă construcţiile eşuau una după alta, din cauză că nu aveam elemente comune în rotor, şi începeam să ne pierdem curajul. Exista oare vreo barieră teoretică de explorat?

Li s-a întîmplat unora dintre noi ca rotorii să fie poate prea simpli. Ceva mai complicat putea fi mai bun. Numerele care interveneau puteau fi mult mai mari şi probabilitatea unei coincidenţe întîmplătoare ar fi fost redusă. Şi s-a ajuns ca Smith şi Stone să se apuce de calculul unei perechi rotor-stator complicate, în timp ce Brooks, fără ştirea lor, lucra la o altă pereche, în altă parte a colegiului. După cîteva ore, Smith şi Stone au năvălit în camera lui Brooks, strigînd „Avem un pătrat perfect!" La care Brooks a răspuns: „Şi eu!".

Ambele pătrate erau de ordinul 69. Însă Brooks a continuat să experimenteze cu rotori mai simpli şi a obţinut un pătrat perfect de ordinul 39. Acesta corespunde rotorului din fig. 175. O scurtă descriere a acestuia este dată de următoarea formulă:

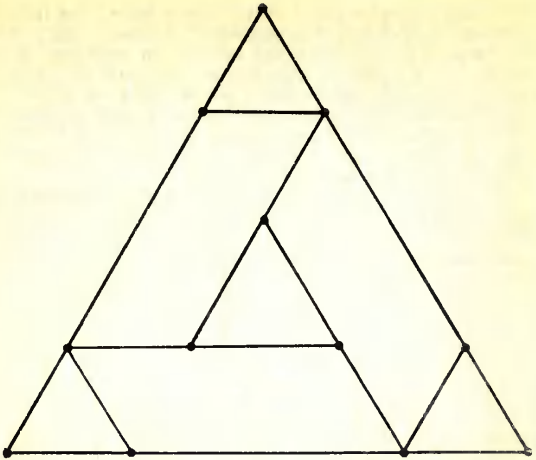
(2 378, 1 163, 1 098), (65, 1 033), (737, 491), (249, 242), (7, 235), (478, 259), (256), (324, 944), (219, 296), (1 030, 829, 519, 697), (620), (341, 178), (163, 712, 1 564), (201, 440, 157, 31), (126, 409), (283), (1 231), (992, 140), (852).

În această formulă, fiecare pereche de paranteze reprezintă unul dintre segmentele orizontale în schema de subdiviziuni a pătratului perfect. Segmentele sînt luate în ordine verticală, începînd cu latura orizontală de sus a pătratului, iar latura orizontală de jos este omisă. Numerele cuprinse de o pereche de paranteze sînt laturi ale pătratelor componente, care au laturile orizontale de sus pe segmentul corespunzător. Acestea sînt luate de la stînga spre dreapta. Latura redusă a pătratului perfect este suma numerelor din prima pereche de paranteze, adică 4 639.

Notaţia pe care am folosit-o mai sus este cea a lui C. J. Bouwkamp. El a folosit-o în lista publicată a dreptunghiurilor carabile simple, pînă la ordinul 13.

Cu aceasta se termină efectiv relatarea modului în care susnumita echipă specială a rezolvat problema pătratului perfect. Este adevărat că am mai lucrat la această problemă. Toate pătratele

Fig. 175



perfecte obținute prin metoda rotor-stator aveau anumite proprietăți pe care le consideram imperfecte. Fiecare conținea cîte un dreptunghi perfect mai mic, adică nu erau simple. Fiecare avea un punct în care se întîlneau patru dintre pătratele componente, adică aveau „răscruci". În sfîrșit, fiecare avea un pătrat component, care nu era unul dintre cele de la vîrfuri și care era tăiat în două de o diagonală a figurii complete. Utilizînd o teorie mai avansată a rotorilor, am reușit să obținem pătrate perfecte, neafectate de primele două defecte. După mai mulți ani, datorită unei metode bazate pe o simetrie de cu totul alt gen, am obținut un pătrat perfect de ordinul 69, care nu avea nici unul dintre cele trei tipuri de defecte. Însă pentru o dare de seamă asupra acestei lucrări trebuie să-i trimit pe cititori la articolele noastre de specialitate.

Mai există alte trei episoade în istoria pătratului perfect, care merită menționate, deși fiecare poate părea ca un fel de prăbușire. Ca început, continuam să adăugăm exemple la lista dreptunghiurilor perfecte simple de ordinul 13. Într-o zi, am constatat că două

dintre aceste dreptunghiuri aveau aceeași formă, dar nici un element comun. Ele generau un pătrat perfect de ordinul 28, prin construcția din fig. 169. Mai tîrziu, am găsit un dreptunghi perfect de ordinul 13, care putea fi combinat cu unul de ordinul 12 și cu un pătrat component suplimentar, pentru a da un pătrat perfect de ordinul 26. Dacă valoarea unui pătrat perfect se măsoară prin micimea ordinului său, atunci metoda noastră empirică de catalogare a dreptunghiurilor perfecte s-a dovedit superioară frumoasei noastre metode teoretice.

Alți cercetători au folosit metoda empirică, obținînd rezultate spectaculare. R. Sprague, din Berlin, a alăturat un număr de

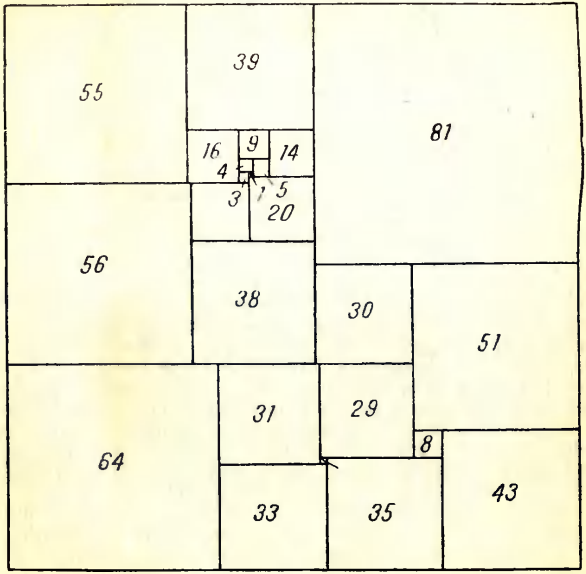


Fig. 176

dreptunghiuri perfecte într-un mod mai ingenios, pentru a construi un pătrat perfect de ordinul 55. Acesta a fost primul pătrat perfect publicat (1939). Mai recent, T.H. Willcocks, din Bristol, care nu și-a limitat catalogul la dreptunghiurile carabile perfecte și simple, a obținut un pătrat perfect de ordinul 24 (fig. 176). Formula sa este: (55, 39, 81), (16, 9, 14), (4, 5), (3, 1), (20), (56, 18), (38), (30, 51), (64, 31, 29), (8, 43), (2, 35), (33). Acest pătrat perfect deține pînă acum recordul ordinului minim.

Spre deosebire de metoda teoretică, cea empirică nu a dat pînă acum un pătrat perfect simplu.

În cazul cînd vreun cititor ar vrea să se ocupe de dreptunghiurile perfecte, iată două probleme nerezolvate. Prima constă în a determina ordinul minim posibil pentru un pătrat perfect. A doua este de a găsi un dreptunghi perfect simplu, a cărui latură orizontală să fie dublul celei verticale.

ADAOS

În 1960 C.J. Bouwkamp a publicat un catalog al tuturor dreptunghiurilor carabile simple (adică al dreptunghiurilor carabile care nu conțin dreptunghiuri carabile mai mici), pînă la ordinul 15 inclusiv. Cu ajutorul unui calculator IBM-650, Bouwkamp și colaboratorii săi au întabelat următoarele rezultate:

Ordinul dreptunghiului	9	10	11	12	13	14	15
Imperfecte	1	0	0	9	34	104	283
Perfecte	2	6	22	67	213	744	2609

Dreptunghiurile carabile simple imperfecte sînt cele care conțin cel puțin două pătrate de aceeași mărime. Cele perfecte au toate pătratele de mărimi diferite. Numărul total al dreptunghiurilor carabile simple pînă la ordinul 15 este de 4 094. Este interesant de notat că nu sînt posibile dreptunghiurile carabile simple de ordinele 10 și 11, care să nu fie totodată și perfecte. Unicul dreptunghi simplu imperfect de ordinul 9 are formula (6,4,5) (3,1) (6) (5,1) (4). El prezintă o simetrie frumoasă și dă o foarte bună problemă de secționare pentru un copil.

În cărțile de jocuri și enigme ale lui Sam Loyd și ale lui H.E. Dudeney, apar cîteva dreptunghiuri carabile, dar nici unul dintre ele nu este simplu sau perfect. Un pătrat carabil de ordinul 26, perfect dar nu și simplu, este descris în cartea lui Hugo Steinhaus, *Ma-*

thematical Snapshots, şi în cartea lui Maurice Kraitchik, *Mathematical Recreations*. După cîte ştiu, nu au fost puse în vînzare dreptunghiuri carabile ca jucării de secţionare. Un cititor, William C. Spindler din Arlington, California, mi-a trimis fotografia unei frumoase curţi interioare dreptunghiulare, pe care a construit-o din 19 blocuri de beton pătrate, separate între ele prin fişii de lemn roşu de cîte 2 ţoli.

Cel mai mic pătrat publicat, care este şi simplu şi perfect, are ordinul 38 şi latura 4 920; a fost descoperit de R.L. Brooks. În 1959, recordul a fost îmbunătăţit de T.H. Willcocks din Bristol, Anglia, cu un pătrat de ordinul 37 şi latura 1 947. Este oare posibil să tăiem un cub într-un număr finit de cuburi mai mici, toate de mărime diferită? Nu, şi „membrii importanţi" au dat o frumoasă demonstraţie în *The Dissection of Rectangles into Squares*, „Duke Mathematical Journal", vol. 7, pp. 312—340, 1940. Demonstraţia se desfăşoară astfel:

Închipuiţi-vă că aveţi în faţă, pe masă, un cub tăiat în cuburi mai mici, toate de mărimi diferite. Baza acestui cub va fi, natural, un pătrat carabil. În acest pătrat vom avea un pătrat care va fi cel mai mic. Se vede uşor că acest pătrat mai mic nu poate să se afle la o muchie a pătratului mare care este baza cubului. De aceea, cubul cel mai mic care stă direct pe masă — îl vom numi cubul A — trebuie să fie înconjurat de alte cuburi. Nici unul dintre cuburile înconjurătoare nu poate fi mai mic decît A, deci acesta va fi înconjurat de pereţi mai înalţi decît el. Pe cubul A vor sta cuburi mai mici. Ele formează un pătrat carabil, pe faţa de sus a cubului A. În acest pătrat carabil va fi unul cel mai mic, care determină un cub B, cel mai mic cub care stă direct pe faţa de sus a cubului A.

Mai departe, aceeaşi argumentare va impune un cub C, care este cel mai mic cub aşezat pe cubul B. Astfel avem un regres infinit de cuburi din ce în ce mai mici, asemenea puricilor din cunoscuta poezie a lui Dean Swift, care au purici mai mici ca să-i muşte şi aşa mai departe pînă la infinit. De aceea, nici un cub nu poate fi secţionat într-un număr finit de cuburi mai mici de mărimi diferite.

Un hipercub cuadridimensional are „feţe" cubice. Dacă un hipercub ar putea fi hipercubat, atunci feţele sale ar fi cuburi cubate; aceasta este imposibil, deci nici un hipercub nu poate fi hipercubat. Pentru aceleaşi motive, nici un cub 5-dimensional nu poate fi tăiat în cuburi 5-dimensionale mai mici de mărimi diferite şi aşa mai departe pentru toate cuburile de dimensiuni mai înalte.

Un exemplu de dreptunghi carabil perfect de ordin infinit se vede în fig. 133.

Capitolul 18 JOCURI MECANICE

Jocurile și enigmele mecanice, spre deosebire de cele care se rezolvă cu creionul și hîrtia, sînt probleme care cer un echipament special, manevrabil cu mîna. Acest echipament poate să se reducă la cîteva bucăți de carton sau poate fi o construcție din lemn sau metal a cărei copiere depășește îndemînarea celor mai mulți amatori. Jocurile și enigmele de tip mecanic, produse în industrie și comercializate în magazinele de jucării și de noutăți, sînt adesea extrem de interesante din punct de vedere matematic, ceea ce explică de ce sînt, cîteodată, colecționate de cei ce se ocupă de matematica recreativă. Cea mai mare colecție din cîte cunosc aparține lui Lester A. Grimes, un inginer pensionar, care locuiește la New Rochelle, New York. (Thomas Ransom din Belleville, Ontario, posedă o colecție mai mică, dar axată mai mult pe jucării din secolul al XIX-lea și pe piese vechi chinezești.) Colecția lui Grimes numără vreo 2 000 de piese diferite, unele extrem de rare. Cele ce urmează sînt întemeiate, în mare parte, pe această colecție.

Nu s-a scris o istorie a acestui gen de jocuri și enigme, dar aproape nu încape îndoială că cea mai veche enigmă mecanică este jocul chinezesc antic tangram. Cunoscut în China sub denumirea de *ch'i ch'iao t'u* (ceea ce înseamnă „planul ingenios al celor șapte bucăți"), acesta a fost o distracție populară în Orient, timp de milenii. La începutul secolului al XIX-lea, jocul a cucerit țările occidentale și se spune că Napoleon în exil își petrecea orele cu o astfel de jucărie. Numele „tangram" (necunoscut în China) pare să fi fost dat de un fabricant de jucării anonim din S.U.A. sau din Anglia, pe la jumătatea secolului trecut. Au fost publicate multe cărți despre figurile tangram, una dintre ele este o broșură a lui Sam Loyd, foarte apreciată de colecționari.

Jocuri de secționare similare cu tangram au apărut din timp în timp (grecii și romanii se amuzau cu secționarea unui dreptunghi în 14 bucăți, atribuit lui Arhimede), dar tangram a supraviețuit

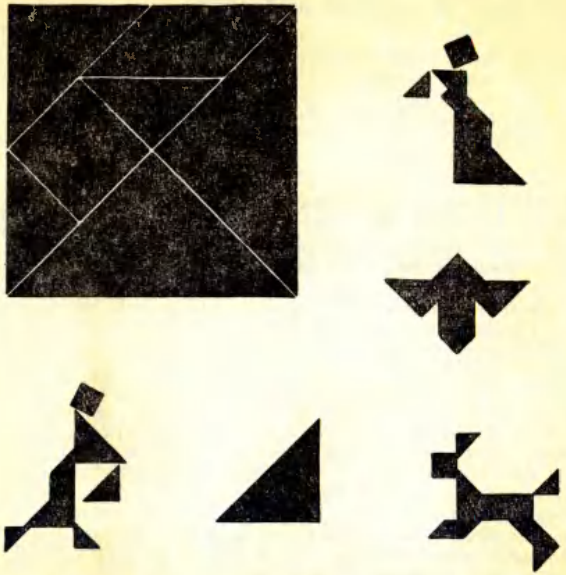
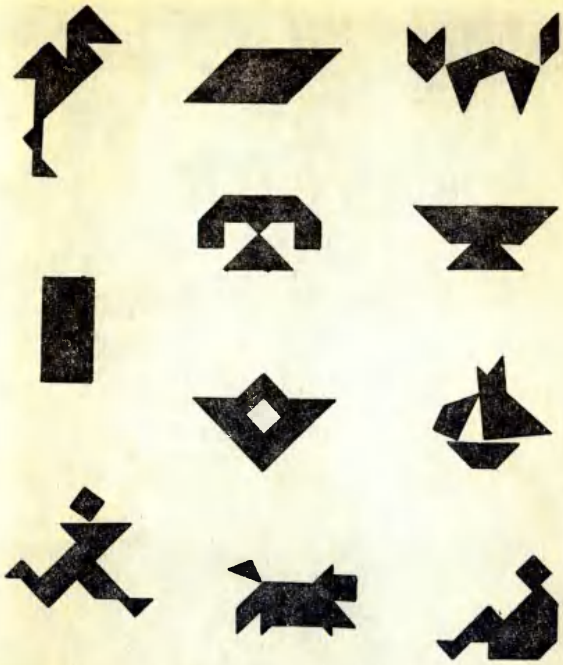


Fig. 177 Tangramele chinezești (*stînga sus*) și unele figuri care se pot executa cu cele șapte „tanuri".

tuturor. Pentru a vă da seama de ce, nu aveți decît să decupați „tanurile" dintr-un pătrat de carton gros și să vă încercați apoi abilitatea în rezolvarea cîtorva tangrame sau în inventarea unora noi. Figura 177 arată cum trebuie decupat pătratul. Romboidul trebuie colorat în negru de ambele părți, așa încît îl putem întoarce cînd vrem. Toate șapte tanurile trebuie folosite în orice figură. Numai modelele geometrice cer un oarecare efort pentru a fi rezolvate; am adăugat un număr de imagini figurative pentru a arăta ce efecte se pot obține.



Unele jocuri de secționare de acest tip dau naștere, din cînd în cînd, unor probleme de matematică nicidecum banale. Închipuiți-vă, de exemplu, că vreți să aflați toate poligoanele convexe (ale căror unghiuri exterioare nu sînt mai mici de 180°) care se pot obține cu cele șapte tanuri. Le puteți găsi prin prelungite probe și erori, dar cum puteți demonstra că le-ați descoperit efectiv pe toate? Doi matematicieni de la Universitatea națională din Chekiang — Fu Traing Wang și Chuan-Chih Hsiung — au publicat, în 1942,

Lester Grimes din New Rochelle și cîteva din cele 2000 de jucării și jocuri mecanice ale sale.

un articol consacrat tocmai acestei probleme. Metoda lor este ingenioasă. Fiecare dintre cele cinci tanuri mai mari poate fi împărțit în triunghiuri dreptunghice isoscele, congruente cu cele două tanuri mici, astfel încît cele șapte tanuri sînt formate din 16 triunghiuri

dreptunghice isoscele identice. Printr-un subtil lanț de argumente, cei doi autori chinezi arată că cu aceste 16 triunghiuri se pot forma 20 de poligoane convexe diferite (fără a socoti rotațiile și oglindirile). Este apoi ușor să demonstrăm că dintre aceste 20 de poligoane, exact 13 sînt tangrame.

Dintre cele 13 tangrame convexe posibile, unul este un triunghi, șase sînt patrulatere, două sînt pentalatere și patru hexalatere. Triunghiul și trei patrulatere sînt arătate în figură. Este o problemă captivantă, dar nicidecum ușoară, de a le descoperi pe celelalte nouă. Fiecare poate fi format în mai multe moduri, dar există un hexagon care este considerabil mai greu de sesizat decît celelalte 12 figuri.

Un alt gen popular de jocuri mecanice, ai căror strămoși se pot urmări timp de secole, se compune din fise sau cu puluri care se mișcă pe o tablă conform unor reguli prescrise, cu scopul de a obține un rezultat anumit. Unul dintre cele mai bune jocuri de acest fel, care s-a bucurat de un mare succes comercial în Anglia victoriană, este redat în fig. 178. Obiectul jocului este de a schimba între ele poziția pieselor negre și a celor albe, prin cel mai mic număr de mutări. O mutare constă fie din trecerea de la un pătrat la un altul vecin liber (1), fie dintr-un salt peste o piesă vecină spre un pătrat gol (2). Un pion poate sări un pion de aceeași culoare sau de culoare opusă. Toate mutările sînt „după mersul turei"; nu se

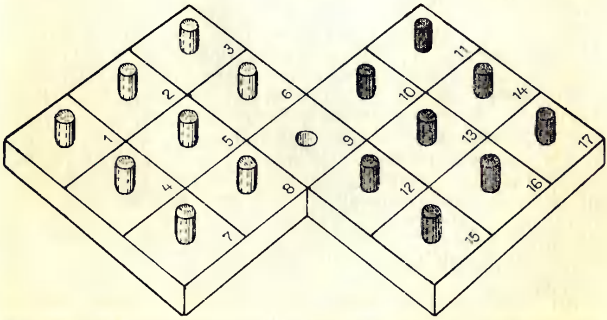


Fig. 178 Cum putem schimba poziția pieselor albe și a celor negre în cel mai mic număr de mutări?

admit mutări diagonale. Cele mai multe cărți de jocuri dau o soluție în 52 de mutări, însă Henry Ernest Dudeney a descoperit o soluție elegantă în 46 de mutări. Puteți juca așezînd monede mici peste pionii din ilustrație. Pătratele sînt numerotate pentru a ușura memorarea soluției.

Am ales acest joc și pe cel precedent, deoarece cititorul și le poate confecționa fără efort. Cele mai multe dintre jocurile colecției lui Grimes nu sînt ușor de făcut. Deoarece pentru a le putea aprecia, trebuie să le mînuim, mă voi mulțumi cu o scurtă descriere a varietății lor. Există acolo cutii, pungi și alte recipiente enigmatice, care trebuie deschise prin metode tăinuite cu ingeniozitate; sute de fire încîlcite în mod straniu, din care trebuie separate unele; brățări și inele din argint, făcute din bucăți separate care se îmbină ingenios; corzi care trebuie scoase din obiecte fără a fi tăiate sau deznodate; jocuri de dexteritate din sticlă conținînd obiecte care sînt rostogolite sau mutate prin lunecare într-o poziție dorită; inele care trebuie scoase de pe verigi; ouă care trebuie să stea în echilibru pe un vîrf; labirinturi în trei dimensiuni; jocuri chinezești cu bucăți de lemn îmbinate; jocuri în care trebuie mișcate fise sau mutate blocuri și sute de enigme curioase care desfid orice clasificare. Cine a inventat astfel de jucării? A le urmări pînă la origine ar fi o sarcină imposibilă. În majoritatea cazurilor, nu se știe nici măcar din ce țară provin.

Există o singură excepție fericită. O secție din colecția lui Grimes este rezervată la vreo 200 de jocuri remarcabile, inventate și construite de L.D. Whitaker, un veterinar pensionar din Farmville, Virginia. Jocurile sînt frumos executate din lemn fin (Whitaker le confecționează într-un atelier din subsolul casei sale), dar multe dintre ele sînt imens de complicate și de o deosebită ingeniozitate. Un joc tipic este format dintr-o cutie cu o deschidere în capac, prin care se introduce o bilă de oțel. Obiectul jocului constă în a scoate bila printr-o gaură din peretele cutiei. Avem voie să manipulăm cutia în orice fel, bineînțeles cu condiția de a nu o distruge sau deschide. Este nevoie de mult mai mult decît să lovim cutia cu degetul pentru a face bila să se rostogolească prin galerii tăinuite. Anumite piedici trebuie înlăturate lovind ușor cutia, într-un mod determinat. Alte bariere trebuie trecute prin aplicarea unor magneți sau suflînd prin găuri mici. Magneții interiori sînt astfel așezați, încît capturează bila și o țin. Nu vă dați seama de aceasta, deoarece înăuntru sînt bile trucate, pe care le auziți rostogolindu-se. Pe partea exterioară a cutiei pot fi rotite pîrghii și

butoane de diferite tipuri. Unele dintre ele trebuie acționate într-un anumit mod pentru a face bila să treacă prin cutie; altele au doar menirea de a vă pune în încurcătură. La un moment dat, poate să apară necesitatea de a introduce un cui printr-o gaură care abia se vede.

Timp de mai mulți ani Grimes și Whitaker au avut o înțelegere în baza căreia Grimes primea cîte un nou joc la intervale regulate. Dacă-l rezolva într-o lună, avea dreptul să-l păstreze; dacă nu, trebuia să-l cumpere. În unele cazuri, competiția era însoțită de importante pariuri, contractate de terțe persoane. O dată Grimes s-a străduit aproape un an cu un joc al lui Whitaker, fără să-l dezlege. El l-a explorat cu o mică busolă, pentru a localiza toți magneții ascunși și apoi a cercetat cu grijă toate deschiderile cu sîrme curbate. Partea cea mai grea era un buton care trebuia împins înăuntru, dar se pare că niște bile de oțel stăteau în cale. Grimes a dedus, în mod corect, că aceste bile trebuie înlăturate din drum, dar toate încercările sale au eșuat. Pînă la urmă, el a rezolvat enigma cu ajutorul radiațiilor X (*fig.* 179). Radiografia i-a arătat o cavitate mare în

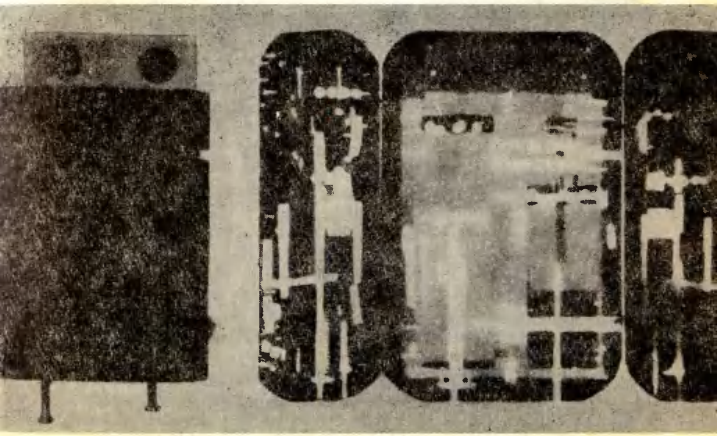


Fig. 179 Pentru a rezolva și a putea păstra una dintre enigmele sale (*stînga*), Grimes a trebuit să o radiografieze.

care trebuiau rostogolite patru bile și o cavitate mai mică în care urma să ajungă o a cincea bilă. Cînd toate cele cinci bile au fost îndepărtate din cale, butonul a funcționat.

Restul enigmei nu mai era atît de greu, deși într-un anumit punct era nevoie de trei mîini. În timp ce mîna dreaptă și cea stîngă apăsau în anumite puncte, un alt buton, legat de un resort puternic, trebuia tras în afară. Grimes a reușit, pînă la urmă, legînd capătul unei sfori de buton, iar celălalt capăt de picior!

RĂSPUNSURI

Hexagonul tangram, de obicei cel mai greu de găsit dintre cele 13 tangrame convexe posibile, este reprezentat în fig. 180. Soluția

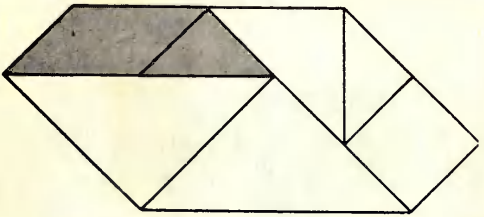


Fig. 180 Poligonul greu de găsit.

este unică, numai că cele două porțiuni hașurate pot fi inversate între ele.

Jocul cu pioni se rezolvă în 46 de mutări astfel: 10—8—7—9—12—6—3—9—15—16—10—8—9—11—14—12—6—5—8—2—1—7—9—11—17—16—10—13—12—6—4—7—9—10—8—2—3—9—15—12—6—9—11—10—8—9. La jumătatea drumului, piesele negre și cele albe formează pe tablă un model simetric. Mutările rămase repetă în ordine inversă schema mutărilor din prima jumătate.

Mai mulți jucători au trimis alte soluții elegante în 46 de mutări. James R. Lawson, din Schenectady, New York, în vîrstă de 14 ani, a găsit 48 de soluții de bază diferite în 46 de mutări. Charles A. Dunning Jr., din Baltimore, și medicul F.B. Exner, din Seattle, au trimis demonstrații că 46 este efectiv numărul minim.

Capitolul 19

PROBABILITATE ȘI AMBIGUITATE

Charles Sanders Peirce a remarcat cîndva că, în nici un domeniu al matematicii, specialiștii nu se pot încurca atît de ușor ca în teoria probabilităților. Istoria ne-o dovedește. Leibniz își închipuia că este la fel de ușor să obțină cu o pereche de zaruri 12 ca și 11. Jean le Rond d'Alembert, marele matematician francez din secolul al XVIII-lea, nu a fost în stare să înțeleagă că rezultatul aruncării unei monede de trei ori este același cu rezultatul aruncării a trei monede dintr-o dată și-și închipuia (cum continuă să creadă mulți amatori ai jocurilor de noroc) că după ce moneda a căzut de multe ori cu stema, este mai probabil să cadă cu valoarea.

Astăzi, teoria probabilităților furnizează răspunsuri clare și fără echivoc la întrebările simple de acest fel, dar numai dacă procedura experimentală implicată este precis definită. O greșeală în această privință este o sursă obișnuită de confuzii în multe probleme recreative în care intervine hazardul. Un exemplu clasic este problema barei rupte. Dacă rupem o bară la întîmplare în trei, care este probabilitatea ca bucățile să formeze un triunghi? Nu se poate răspunde la această întrebare, fără o informație suplimentară asupra metodei exacte de rupere a barei pe care trebuie să o folosim.

O metodă constă în a alege independent și la întîmplare două puncte dintre cele care se situează uniform de-a lungul barei și de a rupe apoi în aceste două puncte. Dacă acesta este procedeul de urmat, răspunsul este 1/4, și există o cale clară de a o demonstra cu o diagramă geometrică. Desenăm un triunghi echilateral,apoi unim mijloacele laturilor pentru a forma în mijloc un triunghi echilateral hașurat mai mic (fig. 181). Dacă luăm un punct oarecare din triunghiul mare și coborîm perpendiculara pe cele trei laturi suma celor trei segmente va fi constantă și egală cu înălțimea triunghiului mare. Dacă acest punct se află, ca punctul *A*, în *interiorul* triunghiului hașurat, nici una dintre cele trei perpendiculare nu va fi mai lungă decît suma celorlalte două. De aceea, cele trei

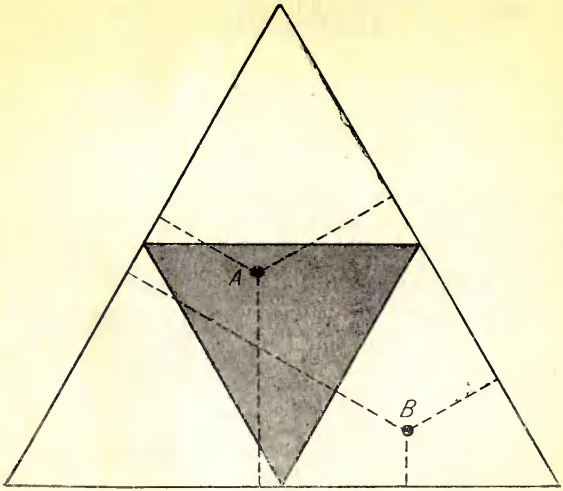


Fig. 181 Dacă rupem o bară în trei bucăți, probabilitatea ca ele să formeze un triunghi este de 1/4.

segmente vor forma un triunghi. Pe de altă parte dacă punctul este, ca B, *exterior* triunghiului hașurat, avem siguranța că o perpendiculară va fi mai lungă decît suma celorlalte două, și deci cele trei segmente nu formează un triunghi.

Avem acum o bună analogie geometrică la problema barei rupte. Suma celor trei perpendiculare corespunde lungimii barei. Fiecare punct din triunghiul mare reprezintă un mod unic de a rupe bara, cele trei perpendiculare corespunzînd celor trei fragmente. Probabilitatea de a rupe bara favorabil este aceeași cu probabilitatea de a alege la întîmplare un punct și de a constata că cele trei perpendiculare vor forma un triunghi. Cum am văzut, aceasta se întîmplă numai cînd punctul este interior triunghiului hașurat. Deoarece aria acestuia este un sfert din aria totală, probabilitatea este 1/4.

Să presupunem însă că interpretăm altfel propoziția „rupeți o bară la întîmplare în trei". Rupem bara la întîmplare, alegem la întîmplare una dintre cele două bucăți și o rupem și pe aceasta la întîmplare. Care sînt șansele ca aceste trei bucăți să formeze un triunghi?

Aceeași diagramă ne va furniza răspunsul. Dacă, după prima rupere a barei, alegem bucata mai mică, triunghiul este imposibil. Ce se întîmplă dacă alegem bucata mai mare? Să presupunem că perpendiculara verticală din diagramă reprezintă fragmentul mai mic. Pentru ca acest segment să fie mai mic decît suma celorlalte două perpendiculare, punctul unde segmentele se întîlnesc nu poate fi în interiorul triunghiului mic din partea de sus a diagramei. El trebuie să se situeze uniform peste cele trei triunghiuri de la bază. Triunghiul haşurat continuă să reprezinte punctele favorabile, dar acum el reprezintă o treime din aria pe care o luăm în considerare. De aceea dacă rupem bucata mai mare, șansele sînt de 1/3, ca cele trei fragmente să formeze un triunghi. Deoarece șansa noastră de a alege bucata mai mare este 1/2, răspunsul la întrebarea inițială va fi produsul dintre 1/2 și 1/3, adică 1/6.

Diagramele geometrice de acest fel trebuie utilizate cu precauție, deoarece și ele comportă ambiguitate. De exemplu, să considerăm următoarea problemă, discutată de Joseph Bertrand, într-o faimoasă lucrare franceză de probabilități, din secolul trecut. Care este probabilitatea ca o coardă dusă la întîmplare într-un cerc să fie mai lungă decît latura triunghiului echilateral înscris? Putem răspunde astfel. Coarda trebuie să pornească dintr-un anumit punct al circumferinței. Notăm punctul cu A și ducem apoi o tangentă la cerc în A, cum se arată în fig. 182 sus. A doua extremitate a corzii se va dispune uniform pe circumferință, generînd un șir infinit de corzi echiprobabile, din care cîteva sînt reprezentate în desen prin linii întrerupte. Este clar că numai corzile care străbat triunghiul sînt mai lungi decît latura lui. Deoarece unghiul triunghiului în A este de 60° și deoarece toate corzile posibile se situează într-un domeniu de 180°, șansele de a duce o coardă mai mare decît latura triunghiului trebuie să fie 60/180, adică 1/3.

Să abordăm acum problema oarecum altfel. Coarda pe care o ducem trebuie să fie perpendiculară pe un diametru al cercului. Desenăm diametrul, apoi adăugăm triunghiul cum se arată în fig. 182 stînga jos. Toate corzile perpendiculare pe acest diametru vor trece printr-un punct care se dispune uniform în lungul diametrului. Cîteva dintre aceste corzi sînt reprezentate iarăși prin linii între-

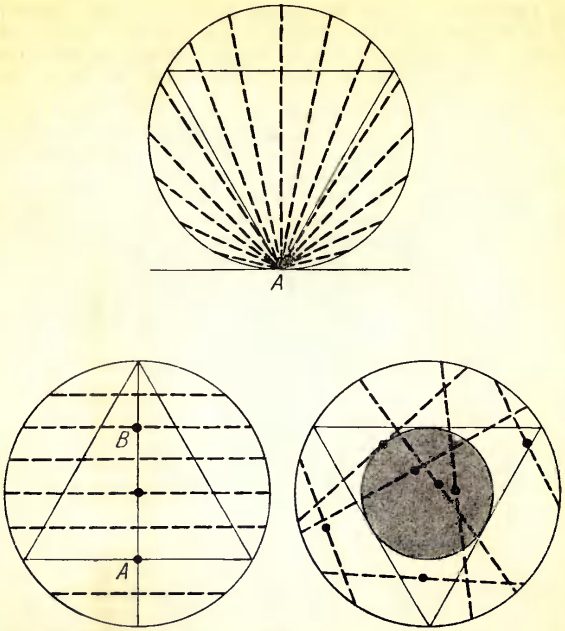


Fig. 182 Probabilitatea ca o coardă dusă la întîmplare să fie mai lungă decît latura triunghiului echilateral înscris se demonstrează că este egală cu 1/3 (*sus*), 1/2 (*stînga*) şi 1/4 (*dreapta*).

rupte. Nu este greu de demonstrat că distanţa de la centrul cercului la A este jumătatea razei. Fie B mijlocul celeilalte părţi a diametrului. Se vede acum uşor că numai corzile care taie diametrul între A şi B vor fi mai lungi decît latura triunghiului. Deoarece AB este jumătatea diametrului, obţinem la problema noastră răspunsul de 1/2.

Iată o a treia abordare. Mijlocul corzii se va dispune uniform peste întregul spațiu din interiorul cercului. O cercetare a desenului din fig. 182 dreapta jos ne va convinge că numai corzile care au mijlocul în interiorul cercului mic hașurat sînt mai lungi decît latura triunghiului. Aria cercului mic este exact un sfert din aria celui mare, deci răspunsul la problema noastră este acum 1/4.

Care dintre cele trei răspunsuri este corect? Fiecare este corect în raport cu o anumită procedură mecanică de a duce coarda aleatorie. Exemple pentru cele trei procedee sînt:

(1) Două vîrtelnițe sînt montate în centrul unui cerc. Ele se rotesc independent. Le punem în mișcare, marcăm cele două puncte unde s-au oprit și le unim printr-o linie dreaptă. Probabilitatea ca această linie să fie mai lungă decît latura triunghiului înscris este de 1/3.

(2) Un cerc mare este desenat pe trotuar. Rostogolim spre el o coadă de mătură de la o distanță de 50 de picioare, pînă cînd ea se oprește undeva pe cerc. Probabilitatea ca ea să marcheze o coardă mai lungă decît latura triunghiului este de 1/2.

(3) Desenăm un cerc din melasă și așteptăm pînă cînd aterizează pe el o muscă, apoi ducem o coardă al cărei mijloc este musca. Probabilitatea ca această coardă să fie mai lungă decît latura triunghiului este de 1/4.

Fiecare dintre aceste trei procedee este o metodă legitimă de a obține o „coardă aleatorie". De aceea, problema, așa cum a fost enunțată la început, este ambiguă. Ea nu are răspuns, pînă cînd nu precizăm înțelesul lui „a duce o coardă la întîmplare" prin descrierea procedeului de aplicat. Se pare că cei mai mulți oameni, cînd li se cere să ducă la întîmplare o coardă, nu adoptă efectiv nimic care să semene cu vreunul dintre cele trei procedee. Într-un interesant articol inedit, intitulat *Organismul uman ca mecanism stochastic*, Oliver L. Lacey, profesor de psihologie la Universitatea din Alabama, descrie un test care a arătat că probabilitatea ca un individ să ducă o coardă mai mare decît latura triunghiului înscris este mult superioară lui 1/2.

Un alt exemplu de ambiguitate care apare din cauza nespecificării procedurii aleatorii este dat în cap. 14, problema 2 (Cartea a doua). Li se spune cititorilor că dl. Smith are doi copii, dintre care cel puțin unul este băiat, și li se cere să calculeze probabilitatea ca ambii să fie băieți. Numeroși cititori au relevat, în mod corect, că răspunsul depinde de procedeul prin care s-a obținut informația „cel puțin unul este băiat". Dacă, dintre toate familiile cu doi copii din care cel puțin unul e băiat, alegem la întîmplare o familie, atunci

răspunsul este 1/3. Dar există un alt procedeu care conduce exact la același enunț al problemei. Dintre familiile cu doi copii, alegem una la întîmplare. Dacă ambii copii sînt băieți, informatorul ne spune „cel puțin unul este băiat". Dacă ambii copii sînt fete, el ne spune „cel puțin unul este fată". Dacă sînt de ambele sexe, el ia un copil la întîmplare și spune „cel puțin unul este...", punînd sexul copilului ales. Dacă urmăm *acest* procedeu, probabilitatea ca ambii copii să fie de același sex este evident de 1/2. (Aceasta se vede ușor, deoarece informatorul compune un enunț în fiecare dintre cele patru cazuri — *BB*, *BF*, *FB*, *FF* — și în jumătate dintre cazuri ambii copii sînt de același sex.) Că celui mai bun matematician poate să-i scape o astfel de ambiguitate se vede din faptul că într-unul dintre cele mai bune manuale universitare recente de matematică modernă această problemă apare într-o formă la care nu se poate răspunde.

O foarte drăguță problemă plină de confuzii, în care intervin trei prizonieri și un paznic, care este și mai greu de enunțat neambiguu, circulă acum. Trei bărbați — *A*, *B* și *C* — se află în celule separate, condamnați la moarte, cînd guvernatorul hotărăște să grațieze pe unul dintre ei. El le scrie numele pe trei bucăți de hîrtie, le amestecă într-o pălărie, scoate una și telefonează gardianului, cerîndu-i ca numele norocosului să fie ținut secret cîteva zile. Zvonul ajunge la prizonierul *A*. Pe cînd gardianul își face rondul de dimineață, *A* încearcă să-l convingă să-i spună cine a fost grațiat. Gardianul refuză.

„Spune-mi atunci, îi cere *A*, numele unuia dintre cei ce urmează să fie executați". Dacă *B* va fi iertat, dă-mi numele lui *C*. Dacă *C* va fi iertat, dă-mi numele lui *B*. Și dacă eu voi fi iertat, aruncă o monedă ca să hotărăști dacă îl vei numi pe *B* sau pe *C*".

„Dar dacă mă vezi aruncînd moneda, răspunde precautul gardian, vei ști că ești unul dintre cei grațiați. Și dacă vezi că nu arunc moneda, vei ști că ești ori d-ta, ori cel pe care nu l-am numit".

„Nu-mi spune acum", zice *A*. „Îmi vei spune mîine dimineață".

Gardianul, care nu avea habar de teoria probabilităților, s-a gîndit peste noapte și a ajuns la concluzia că, dacă va urma procedeul sugerat de *A*, nu-i va da acestuia nimic pentru estimarea șanselor sale de a supraviețui. De aceea, în dimineața următoare, îi spuse lui *A* că *B* va fi executat.

După ieșirea gardianului, *A* rîse în sinea lui de prostia acestuia. Rămîneau acum numai două elemente echiprobabile în ceea ce le place matematicienilor să numească „spațiul de alegeri" al proble-

mei. Ori C va fi grațiat, ori el însuși, astfel că, potrivit tuturor legilor probabilității condiționate, șansele sale de a supraviețui creșteau de la 1/3 la 1/2.

Gardianul nu știa că A putea să comunice cu C, care se afla într-o celulă vecină, prin lovituri codificate în conducta de apă. A apelă la această metodă și-i expuse lui C exact ce-i spusese gardianului și ce-i răspunsese acesta. C era, și el, plin de bucurie în urma acestor noutăți, deoarece își închipuia, pe baza aceluiași raționament ca și A, că șansele sale de supraviețuire urcaseră de asemenea la 1/2.

Au raționat corect cei doi prizonieri? Dacă nu, cum trebuia fiecare să-și calculeze șansele de a fi grațiat?

ADAOS

Dînd a doua versiune a problemei barei rupte, cu greu aș fi putut găsi o mai bună ilustrare pentru ușurința cu care specialiștii pot greși în calculul probabilităților și pentru pericolele pe care le prezintă bazarea pe o diagramă geometrică. Soluția mea este extrasă din William A.Whitworth, *DCC Exercises in Choice and Chance*, problema 677; același răspuns se găsește și în multe alte manuale mai vechi de probabilități. El este pe de-a întregul fals!

În prima versiune a problemei, în care cele două puncte de frîngere sînt alese simultan, punctul reprezentativ din diagramă se situează uniform peste triunghiul mai mare, permițînd o comparare a ariilor pentru a obține un răspuns corect. În a doua variantă, în care bara este ruptă în două, iar apoi este ruptă bucata mai mare, Whitworth este de părere că punctul de pe diagramă se dispune uniform peste cele trei triunghiuri de la bază. Nu este așa. Sînt mai multe puncte în triunghiul din mijloc decît în celelalte două.

Fie lungimea barei egală cu 1 și fie x lungimea bucății mai mici, după prima rupere. Pentru a obține bucăți care să formeze un triunghi, segmentul mai mare trebuie rupt în cadrul unei lungimi de $1 - x$. De aceea, probabilitatea de a obține un triunghi este $x/(1 - x)$. Acum trebuie să mediem toate valorile lui x de la 0 la 1/2 pentru a obține o valoare a acestei expresii. Ea este egală cu $-1 + 2 \lg 2$, adică 0,386. Deoarece probabilitatea de a alege, pentru a rupe, bucata mai mare este de 1/2, înmulțim 0,386 cu 1/2 și obținem 0,193, răspunsul problemei. Aceasta este ceva mai mult de 1/6, răspunsul obținut prin raționamentul lui Whitworth.

Un mare număr de cititori mi-au trimis analize foarte limpezi ale problemei. În rezumatul de mai sus, am urmărit o soluție primită de la Mitchell P. Marcus, Binghamton, New York. S-au primit soluții similare de la Edward Adams, Howard Grossman, Robert C. James, Gerald R. Lynch, G. Bach și R. Sharp, David Knaff, Norman Geschwind și Raymond M. Redheffer. Profesorul Redheffer, de la Universitatea din California, este (împreună cu Ivan S. Sokolnikoff) coautorul lucrării *Mathematics of Physics and Modern Engineering* (McGraw-Hill, 1958), în care se găsește (la p. 636) o discuție completă a problemei. În *Ingenious Mathematical Problems and Methods*, de L. A. Graham, Dover, 1959, problema 32, pot fi găsite alte metode de a rezolva problema în prima versiune.

Frederick R. Kling, John Ross și Norman Cliff, cu toții de la Serviciul de îndrumare educativă de la Princeton, New Jersey, au trimis, de asemenea, o soluție corectă a problemei în versiunea a doua. În încheierea scrisorii lor, ei întreabă care dintre următoarele trei ipoteze este cea mai probabilă:

1. Dl. Gardner a greșit cinstit.
2. Dl. Gardner a greșit intenționat, pentru a-și pune la încercare cititorii.
3. Dl. Gardner este vinovat de ceea ce se numește în lumea matematicienilor a se ține după d'Alembert.

Răspunsul: numărul trei.

RĂSPUNSURI

Răspunsul la problema celor trei prizonieri este că șansele de grațiere ale lui A sînt 1/3, iar ale lui C, 2/3.

Indiferent de numele celui grațiat, gardianul îi poate spune lui A numele unuia care urmează să moară, cu condiția ca acesta să nu fie A. De aceea, cele spuse de gardian nu influențează șansele de supraviețuire ale lui A, care rămîn 1/3.

Situația este analogă cu următorul joc de cărți. Două cărți negre (reprezentînd moartea) și una roșie (grațierea) sînt amestecate și împărțite la trei oameni: A, B, C (prizonierii). Dacă o a patra persoană (gardianul) aruncă o privire furișă asupra celor trei cărți, după care întoarce cu fața în sus o carte neagră, care aparține lui B sau lui C, care este probabilitatea ca A să aibă o carte roșie? Sîntem ispitiți să credem că este 1/2, deoarece numai două cărți

au rămas cu fața în jos, dintre care una roșie. Deoarece însă o carte neagră poate să aparțină în egală măsură lui B sau lui C, întoarcerea ei cu fața în sus nu ne furnizează o informație de valoare pentru a paria pe culoarea cărții lui A.

Aceasta se înțelege ușor, dacă exagerăm situația, făcînd ca moartea să fie reprezentată într-un pachet complet de asul de pică. Întindem pachetul pe masă și A trage o carte. Șansa lui de a evita moartea este 51/52. Să presupunem acum că cineva se uită la cărți, după care întoarce cu fața în sus 50 de cărți printre care nu este asul de pică. Au rămas numai două cu fața în jos, dintre care una trebuie să fie asul de pică, dar aceasta, evident, nu reduce șansa lui A la 1/2. Și aceasta, pentru că este oricînd posibil, dacă ne uităm la fața celor 51 de cărți, să găsim 50 printre care nu este și asul de pică. De aceea, dacă le găsim și le întoarcem cu fața în sus, șansele lui A rămîn neafectate. Firește, dacă 50 de cărți sînt întoarse cu fața în sus la întîmplare și nici una nu este asul de pică, atunci șansa ca A să fi tras moartea *crește* la 1/2.

Care este situația prizonierului C? Deoarece ori A ori C trebuie să moară, probabilitățile de supraviețuire respective trebuie să dea suma 1. Șansa lui A de a trăi este de 1/3; de aceea șansa lui C trebuie să fie 2/3. Aceasta se poate confirma, ținînd seama de cele 4 elemente posibile în spațiul alegerilor noastre și de probabilitățile lor inițiale:

1. C este grațiat, gardianul numește pe B (1/3)
2. B este grațiat, gardianul numește pe C (1/3)
3. A este grațiat, gardianul numește pe B (1/6)
4. A este grațiat, gardianul numește pe C (1/6).

În cazurile 3 și 4, A rămîne în viață, șansele lui fiind 1/3. Numai cazurile 1 și 3 se aplică atunci cînd devine cunoscut că B va muri. Șansele pentru cazul 1 sînt 1/3, dublul șanselor (1/6) cazului 3, deci șansele de supraviețuire ale lui C sînt două la una, adică 2/3. În modelul cu cărți de joc, aceasta înseamnă că avem probabilitatea de 2/3 ca C să aibă o carte roșie.

Această problemă a celor trei prizonieri mi-a adus o avalanșă postală, pro și contra; din fericire, toate obiecțiile s-au dovedit neîntemeiate. Sheila Bishop din East Haven, Connecticut, mi-a trimis următoarea analiză bine gîndită:

Domnilor,

Următoarea situație paradoxală m-a condus întîi la concluzia că raționamentul lui A *este greșit. Să admitem că prima conversație a lui* A *cu gardianul a avut loc cum se spune în problemă, dar să admitem acum că tocmai atunci cînd gardianul se apropia de celula lui* A *pentru a-l anunța că* B *va fi executat, gardianul a căzut într-o gaură de canal sau a fost împiedicat în vreun alt fel de a-și transmite mesajul.*

A *putea atunci să raționeze astfel: „Să presupunem că el avea de gînd să-mi spună că* B *va fi executat. Atunci șansa mea de a supraviețui ar fi de 1/2. Dacă, pe de altă parte, el urma să-mi spună că* C *va fi executat, șansele mele rămîn tot 1/2. Acum știu cu certitudine că el mi-ar fi spus unul dintre aceste două lucruri; de aceea, șansele mele de a supraviețui sînt oricum mărginite la 1/2". Urmînd această linie de gîndire vedem că* A *își putea închipui că șansele sale sînt 1/2, chiar fără să-l întrebe nimic pe gardian!*

După cîteva ore am ajuns, pînă la urmă, la concluzia: să considerăm un mare număr de triplete de prizonieri, toți în aceeași situație, iar în fiecare grupă A *este cel care stă de vorbă cu gardianul. Dacă avem în total 3*n *triplete, atunci în* n *dintre ele* A *va fi grațiat, în* n *va fi fi grațiat* B *și în* n *va fi* C. *Vom avea 3* n*/2 cazuri în care gardianul va spune „*B *va fi executat". În* n *dintre aceste cazuri* C *va fi eliberat și în* n*/2 din cazuri va fi liber* A; *șansele lui* C *sînt de două ori mai bune decît ale lui* A. *De aceea, șansele pentru* A *și* C *sînt respectiv 1/3 și 2/3...*

Lester R.Ford Jr. și David N.Walker, ambii de la oficiul din Arizona al societății General Analysis Corporation, au considerat că gardianul fusese nedreptățit:

Domnilor,

Vă scriem pentru a interveni în favoarea gardianului, care este un slujbaș politic și, de aceea, nu dorește să intre în controverse spre propriul său folos.

Îl caracterizați într-o manieră defăimătoare ca fiind „Gardianul, care nu avea habar de teoria probabilităților..." și simt că s-a făcut o mare nedreptate. Nu numai că sînteți incorect (și poate calomniator),

dar vă pot asigura personal că pasiunea lui, timp de mai mulți ani, a fost matematica și, în particular, teoria probabilităților. Hotărîrea sa de a-i răspunde lui A, *deși bazată pe încercarea omenească de a înfrumuseța ultimele ore ale unui condamnat (căci știm acum că a fost grațiat* C), *era o hotărîre perfect compatibilă cu instrucțiunile guvernatorului.*

Singurul punct în care ar putea fi susceptibil de critică (și pentru aceasta a fost admonestat de guvernator) constă în faptul că n-a știut să-l împiedice pe A *să comunice cu* C, *permițîndu-i astfel lui* C *să aprecieze mai exact șansele* sale *de a supraviețui. Nici aici paguba nu e prea mare, căci* C *nu a făcut uz de informație.*

Dacă nu veți publica o retractare și o scuză, ne vom vedea nevoiți să renunțăm la abonament.

Capitolul 20 MISTERIOSUL Dr. MATRIX

Numerologia, studiul semnificației mistice a numerelor, are o istorie lungă și complicată, care cuprinde pe vechii cabaliști evrei, pe pitagoreicii greci, pe Filon din Alexandria, pe gnostici, numeroși teologi și pe numerologii de la Hollywood, care au prosperat între anii 1920 și 1930 inventînd nume (cu „vibrație" corespunzătoare) pentru prezumtive stele de cinema. Trebuie să mărturisesc că am găsit totdeauna această istorie mai curînd plicticoasă. De aceea, cînd un prieten mi-a sugerat să iau contact cu un numerolog din New York, care își zicea dr. Matrix, am fost cît se poate de puțin interesat.

„Dar vei vedea că este foarte amuzant, a insistat prietenul. El susține că ar fi o reîncarnare a lui Pitagora și pare, în adevăr, să știe ceva matematică. De exemplu, mi-a arătat că 1960 va fi un an neobișnuit, deoarece 1960 se poate exprima ca sumă a două pătrate — 14^2 și 42^2 — și atît 14 cît și 42 sînt multipli ai numărului mistic 7".

Am făcut o rapidă verificare cu creionul și hîrtia. „Pe Platon, are dreptate"! am exclamat. „Poate că merită să stăm de vorbă despre aceasta".

Am cerut telefonic o întîlnire, și, după cîteva zile, o drăguță secretară, cu ochi negri migdalați, m-a introdus în sanctuarul doctorului. Zece numere uriașe, de la 1 pînă la 10, strălucind ca aurul, erau aninate pe peretele cel mai îndepărtat, deasupra unei mese lungi. Erau aranjate în ordinea triunghiulară, devenită astăzi comună, datorită aranjării cuielor pentru atîrnat vase, dar în care vechii pitagoricieni vedeau cu pietate *sacra tetractys*. Un mare dodecaedru de pe masă avea calendarul cîte unei luni a anului curent pe fiecare din cele 12 fețe. O muzică de orgă, calmă, se auzea dintr-un difuzor ascuns.

Dr. Matrix a intrat în cameră printr-o ușă laterală, camuflată de o perdea; un om înalt, osos, cu nasul proeminent și cu ochi pă-

trunzători de culoare deschisă. Mi-a indicat un fotoliu. „După cum am înțeles, scrieți pentru «Scientific American», îmi spuse cu un zîmbet strîmb, și ați venit mai curînd să vă interesați de metodele mele decît pentru a cere o analiză personală".

„Așa este".

Doctorul apăsă un buton dintr-un perete lateral, și un panou de lemn lunecă într-o parte, dînd la iveală o mică tablă neagră. Pe tablă erau scrise cu cretă literele alfabetului, în forma unui cerc care împreuna *Z* cu *A* (fig. 183). „Să începem, îmi spuse, prin

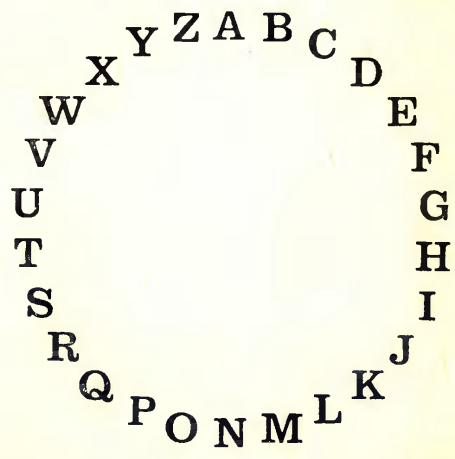


Fig. 183 Alfabetul circular al dr. Matrix.

a explica de ce este probabil ca 1960 să fie un an favorabil pentru revista dv.". Cu vîrful unui creion, începu să atingă literele, începînd cu *A* și mergînd în jurul cercului pînă a numărat 19. Litera a 19-a era *S*. Continuă să numere de la 1 în jurul cercului, începînd cu *T*, pînă la 60. Numărătoarea se termină la *A*. *S* și *A* sînt, accentuă el, inițialele lui „Scientific American".

„Nu mă impresionează, îi spusei. Cînd există mii de moduri diferite prin care se poate ajunge la o astfel de coincidență, devine

extrem de probabil ca să puteți găsi măcar una, cu un efort destul de mic".

„Bineînțeles, răspunse dr. Matrix. Dar nu fiți prea sigur că asta e tot. Coincidențele de acest fel sînt mult mai frecvente decît pot fi justificate de teoria probabilităților. Știți, numerele au o viață misterioasă proprie". Își flutură mîna spre numerele de aur din perete. „Firește, acestea nu sînt numere. Sînt numai simboluri pentru numere. Nu a spus matematicianul german Leopold Kronecker că «Dumnezeu a creat numerele întregi, iar tot restul este opera omului»?

„Nu sînt sigur că sînt de acord, replicai, dar să nu ne pierdem timpul cu metafizica".

„Foarte bine, îmi spuse, așezîndu-se în spatele mesei. Îngăduiți-mi să citez cîteva exemple de analiză numerologică, care ar putea interesa pe cititorii dv. Ați auzit, poate, de teoria că Shakespeare ar fi colaborat în secret la traducerea Bibliei pentru regele James"?

Dădui din cap.

„Pentru un numerolog nu încape îndoială. Dacă luați psalmul 46, veți constata că al 46-lea cuvînt este aici «*shake*». Numărați înapoi pînă la al 46-lea cuvînt de la sfîrșitul aceluiași psalm (cuvîntul *selah* de la sfîrșit nu face parte din psalm) și veți ajunge la cuvîntul «*spear*»".

„De ce 46? întrebai zîmbind".

„Pentru că, îmi răspunse dr. Matrix, atunci cînd versiunea autorizată a regelui James a fost terminată în 1610, Shakespeare avea exact 46 de ani".

„Nu e rău, remarcai, luînd cîteva note. Altceva?"

„Mii de alte lucruri, răspunse dr. Matrix. Considerați cazul lui Richard Wagner și al numărului 13. Numele său are 13 litere. S-a născut în 1813. Adunați cifrele și veți obține 13. A compus 13 mari lucrări muzicale. *Tannhäuser*, cea mai mare dintre ele, a fost terminată la 13 aprilie 1845 și reprezentată pentru întîia oară la 13 martie 1861. L-a terminat pe *Parsifal* la 13 ianuarie 1882. *Walkiria* a fost reprezentată pentru prima dată la 26 iunie 1870, și 26 este dublul lui 13. *Lohengrin* a fost compus în 1848, însă Wagner l-a văzut pe scenă abia în 1861, exact cu 13 ani mai tîrziu. A murit la 13 februarie 1883. Remarcați că prima și ultima cifră a anului dau iarăși 13. Acestea sînt numai cîteva dintre importantele date cu 13 din viața lui Wagner."

Dr. Matrix aşteptă să-mi termin însemnările, apoi continuă. „Datele importante nu sînt niciodată întîmplătoare. Era atomică a început în 1942, cînd Enrico Fermi şi colaboratorii săi au realizat prima reacţie nucleară în lanţ. Aţi citit, probabil, în cartea Laurei Fermi despre soţul ei, în ce fel a telefonat Arthur Compton lui James Conant pentru a-i comunica ştirea. Prima observaţie a lui Compton a fost: „Navigatorul italian a ajuns la Lumea Nouă". Vi s-a întîmplat vreodată să inversaţi cifrele din mijlocul anului 1942, obţinînd 1492, anul în care Columb, un navigator italian anterior, a descoperit Lumea Nouă?"

„Niciodată".

„Viaţa împăratului Wilhelm I este interesantă din punct de vedere numerologic, continuă el. În 1849, el a reprimat revoluţia socialistă din Germania. Suma cifrelor acestei date este 22. Adăugaţi 22 la 1849 şi obţineţi 1871, anul încoronării sale ca împărat. Repetaţi procedeul cu 1871 şi ajungeţi la 1888, anul morţii sale. Repetaţi din nou şi obţineţi 1913, ultimul an de pace dinaintea primului război mondial, care i-a distrus imperiul. Scheme neobişnuite ale datelor sînt curente în viaţa tuturor oamenilor celebri. Este oare o coincidenţă că Rafael, cel mai mare pictor de scene sacre, s-a născut la 6 aprilie şi a murit la 6 aprilie şi că ambele date au căzut în Vinerea Mare? De ce este evoluţia o cheie la filozofia lui John Dewey ca şi la a lui Henri Bergson? Pentru că ambii s-au născut în 1859, anul apariţiei *Originii speciilor* a lui Darwin. Credeţi că este o întîmplare că Houdini, iubitorul de mister, a murit la 31 octombrie, ajunul zilei tuturor sfinţilor?"

„Poate," murmurai.

Doctorul dădu cu putere din cap. „Presupun că veţi socoti drept o coincidenţă faptul că, în sistemul zecimal pentru biblioteci al lui Dewey, clasificarea pentru cărţile de teoria numerelor este 512. 81".

„Ce este neobişnuit aici?"

„Numărul 512 este doi la puterea a noua, iar 81 este nouă la puterea a doua. Dar am aici ceva şi mai remarcabil. Întîi, 11 plus 2 minus 1 este 12. Să vă arăt cum funcţionează aceasta cu litere". Se îndreptă spre tablă şi scrise pe ea cu cretă cuvîntul ELEVEN (unsprezece). Adăugă TWO (doi), pentru a obţine ELEVEN-TWO, apoi şterse literele lui ONE (unu), lăsînd ELEVTW. „Rearanjaţi aceste şase litere, îmi zise, şi veţi obţine TWELVE (doisprezece)".

Începui să-mi tamponez fruntea cu batista. „Aveţi vreo părere despre 666, întrebai, aşa-numitul număr al fiarei (revelaţia 13: 18)? Am dat recent peste o carte, *Our Times and Their Meaning*,

de Carlyle B. Haynes, un adventist de ziua a șaptea. El identifică numărul cu biserica romano-catolică, adunînd toate numerale romane ale unuia dintre titlurile în latină ale papei: VICARIUS FILII DEI (Vicarul fiului Domnului). El obține exact 666". (V = 5, I = 1, C = 100, I = 1, U = 5, I = 1, L = 50, I = 1, I=1, D = = 500, I = 1. U este luat drept V, deoarece așa se scria de obicei).

„V-aș putea vorbi ore întregi despre 666, spuse doctorul, oftînd din greu. Această aplicare particulară a numărului fiarei este foarte veche. În mod firesc, este ușor pentru un numerolog îndemînatic să găsească 666 în orice nume. În adevăr, dacă adunați numerale latine din numele lui ELLEN GOULD WHITE, inspirata profetă care a întemeiat adventismul de ziua a șaptea, considerînd W ca fiind „dublu U"[1] sau doi V, el dă, de asemenea, suma 666 (L = 50, L = 50, U = 5, L = 50, D = 500, W = 10, I = 1). *Război și pace* a lui Tolstoi (vol. III, partea I, cap. 19) are o frumoasă metodă de a obține 666 din L'EMPEREUR NAPOLÉON (împăratul Napoleon). Pe cînd William Gladstone era primministru al Angliei, un dușman politic a scris GLADSTONE în litere grecești, a adunat numerale grecești ale numelui și a obținut 666. HITLER dă iarăși exact acest număr, dacă utilizăm un cod bine cunoscut în care A este 100, B 101, C 102 etc."

„Mi se pare că matematicianul Eric Temple Bell, spusei, a fost cel care a descoperit că 666 este suma întregilor de la 1 la 36, numerele de pe ruletă".

„Just, răspunse Dr. Matrix. Și dacă scrieți de la dreapta la stînga primele șase cifre romane, în ordinea lor obișnuită, obțineți aceasta". Scrise pe tablă DCLXVI (666).

„Dar ce înseamnă aceasta?"

Dr. Matrix rămase o clipă tăcut. „Adevăratul înțeles este cunoscut numai cîtorva inițiați, îmi răspunse fără să zîmbească. Mi-e teamă că nu v-o pot spune acum".

„Ați avea amabilitatea de a comenta viitoarea campanie prezidențială? întrebai. Bunăoară, va fi numit candidat Nixon sau Rockefeller?"

„Este o altă chestiune, la care prefer să nu răspund, dar aș dori să vă atrag luarea aminte asupra unor contrapunctări curioase referitoare la acești doi oameni. „Nelson" începe și se termină cu N. „Rockefeller" începe și se termină cu R. Numele lui Nixon pre-

[1] Numele în engleză al literei W.

zintă aceeași schemă inversată. „Richard" începe și aproape se termină cu R. „Nixon" începe și se termină cu N. Știți cumva cînd și unde s-a născut Nixon?"

„Nu".

„La Yorba Linda, California, în ianuarie, 1913". Dr. Matrix se întoarse din nou spre tablă și scrise data astfel: 1—1913. Adună cifrele și obținu 15. Pe alfabetul circular încercui literele Y, L și C, inițialele locului de naștere al lui Nixon, apoi numără a cincisprezecea literă de la fiecare, în sensul mersului acelor de ceasornic și obținu NAR, inițialele lui Nelson Aldrich Rockefeller! „Firește", adaugă el, dintre cei doi, Rockefeller are șanse mai bune de a fi ales".

„Cum așa"?

„Numele său conține o literă dublă. Vedeți, din cauza numărului 2 din secolul 20, fiecare președinte din acest secol trebuie să aibă o literă dublă în numele său, ca OO în Roosevelt și RR în Harry Truman".

„Ike nu are o literă dublă, remarcai".

„Eisenhower este, pînă acum, unica excepție. Trebuie să ținem minte însă că el a candidat de două ori împotriva lui Adlai Ewing Stevenson, care nu are nici el o literă dublă. Dubla inițială D.D. a lui Ike a fost suficientă pentru a-i asigura avantajul".

Aruncai o privire spre tabla neagră. „Acest alfabet circular are și alte utilizări"?

„Are multe, îmi răspunse. Îngăduiți-mi să vă dau un exemplu recent. Acum două zile a venit să mă vadă un tînăr din Brooklyn. Își călcase jurămîntul de credință față de o bandă de răufăcători și credea că trebuie să părăsească orașul, pentru a scăpa de răzbunarea membrilor bandei. Voia să știe dacă-i pot spune cu ajutorul numerologiei încotro să se ducă? L-am convins că nu trebuie să meargă nicăieri, luînd cuvîntul ABJURER (renegat) și substituind pentru fiecare literă pe cea diametral opusă în alfabetul circular".

Dr. Matrix desenă linii cu creta pe tablă de la A la N, de la B la O etc. Noul cuvînt era NOWHERE (nicăieri). „Dacă vă închipuiți că este o coincidență, faceți o încercare, chiar cu cuvinte mai scurte, îmi zise. Șansa împotriva plecării de la un cuvînt de șapte litere, pentru a găsi un altul prin această tehnică, este astronomică".

Mă uitai cu nervozitate la ceasul brățară. „Înainte de a pleca, ați putea să-mi dați o problemă numerologică sau două, pe care să le supun spre rezolvare cititorilor mei?"

„Cu multă plăcere. Iată una ușoară." Scrise pe carnetul meu de note literele, OTTFFSSENT.

„Pe ce bază sînt ordonate literele?" mă întrebă. „Este o problemă pe care o dau studenților mei începători în neopitagoreism. Vă rog să observați că numărul de litere este același ca în numele Pythagoras".

Dedesubtul acestor litere îmi scrise:

FORTY
+ TEN
+ TEN
SIXTY[1]

„Fiecare literă din această problemă de adunare figurează pentru o altă cifră, îmi explică. Soluția este unică, dar trebuie să vă frămîntați un pic creierul pentru a o găsi".

Pusei creionul și hîrtia în buzunar și mă ridicai. Muzica de orgă continua să se reverse în încăpere. „Bach?", întrebai.

„Da, în adevăr, răspunse doctorul, conducîndu-mă spre ușă. Bach a studiat profund știința noastră. Ați citit cumva *Joy of Music* a lui Leonard Bernstein? Cuprinde un paragraf interesant despre investigațiile numerologice ale lui Bach. El știa că suma valorilor din BACH — luînd A drept 1, B drept 2 etc. — este 14, un multiplu al divinului 7. El știa, de asemenea, că suma numelui său întreg, scris într-un alfabet german vechi, este 41, adică 14 inversat, precum și al 14-lea număr prim, dacă-l includeți și pe 1. Ceea ce ascultați acum este *Vor deinem Thron tret'ich allhier*, un imn în care forma muzicală folosește acest motiv 14—41. Prima frază are 14 note, iar întreaga melodie 41. O armonie măreață, nu-i așa? Dacă compozitorii noștri moderni ar învăța un pic de numerologie, ei s-ar putea apropia tot atît de mult de muzica sferelor!"

Am părăsit biroul oarecum amețit; dar nu atît de amețit, încît să nu observ din nou, în treacăt, că secretara are 1 nas cîrn, 2 ochi luminoși și că este în întregime foarte interesantă.

[1] 40 + 10 + 10 = 60.

ADAOS

Alegerile prezidențiale din 1960 au dat o dramatică confirmare observațiilor doctorului Matrix despre legea literei duble. Dintre principalii candidați ai partidului democrat, numai John Fitzgerald Kennedy avea litera dublă, și numai el a fost ales candidat și președinte.

Dr. Matrix a subliniat că Enrico Fermi a obținut prima reacție în lanț în 1942, și că, dacă inversăm 94, obținem 1492, anul în care un alt italian a făcut o mare descoperire. Luis W. Alvarez, un fizician de la Laboratorul de radiații al Universității din California (Berkeley), a continuat această analiză pînă la noi înălțimi numerologice. Scrisoarea sa a apărut în „Scientific American", aprilie 1960:

Domnilor,

Am citit cu plăcere darea de seamă a lui Martin Gardner despre vizita sa la dr. Matrix. Cînd doctorul a discutat prima reacție nucleară în lanț, el era sigur pe drumul cel bun, dar deoarece nu a colaborat activ la proiectul Manhattan, îi lipseau unele verificări importante ale concluziilor sale. El ar fi știut, firește, că singurul motiv pentru care fusese construită pila în timpul războiului era de a produce plutoniu, elementul 94 al sistemului periodic. Ceea ce îi lipsea doctorului Matrix pentru că nu era lămurit despre proiectul Manhattan este faptul că, în tot timpul războiului, codul pentru plutoniu era „49". Dacă bunul doctor ar fi dispus de acest fapt, el ar fi subliniat și că elementul 94 a fost descoperit în California, țara celor care participaseră aici la delirul aurului în 1849.

Dat fiind că verificarea reală a unei noi teorii constă în capacitatea ei de a prevedea noi relații, pe care autorul teoriei nu putea să le prevadă, m-ați convins că numerologia este o știință valabilă.

RĂSPUNSURI

Literele OTTFFSSENT sînt inițialele numelor numerelor cardinale de la 1 la 10*.

Problema de adunare a doctorului Matrix provine de la Alan Wayne, profesor de matematică la o școală medie din New York.

* În engleză, one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten

și a apărut pentru prima dată în „American Mathematical Monthly", august-septembrie 1947, p. 413. În introducerea problemei, redactorul rubricii respective a revistei arăta că, pentru a fi considerat „captivant", un „criptaritm", trebuie să prezinte patru trăsături:

1. Literele trebuie să aibă sens.
2. Trebuie folosite toate cifrele.
3. Soluția trebuie să fie unică.
4. Trebuie să fie rezolvabilă prin logică, mai curînd decît prin obositoare încercări și erori.

Criptaritmul lui Wayne are toate cele patru trăsături. Soluția unică este

$$\begin{array}{r} 29\,786 \\ 850 \\ 850 \\ \hline 31\,486 \end{array}$$

Observați că suma diferă numai la o singură cifră de valoarea cu patru zecimale a lui π.

Pentru cititorii care s-ar întreba cum se rezolvă un criptaritm, voi cita o scrisoare a lui Monte Dernham, din San Francisco, care mi-a trimis cea mai bună explicație a modului cum poate fi analizată problema lui Wayne:

Repetarea lui TY *în prima linie și în a patra impune zero pentru* N *și 5 pentru* E, *cu o unitate transferată la coloana sutelor. Dublul spațiu care precede fiecare TEN cere ca O în FORTY să fie egal cu 9, cu 2 trecut de la coloana sutelor, pe cînd* I *reprezintă cifra 1 în 11, cu* F *plus 1 egal cu* S. *Aceasta lasă nefolosite cifrele 2,3,4,6,7 și 8.*

Dat fiind că coloana sutelor (adică R *plus 2*T *plus 1) trebuie să fie egală cu 22 sau mai mare,* T *și* R *trebuie să fie fiecare mai mari decît 5, lăsînd pentru* F *și* S *cifrele 2,3 și 4. Însă* X *nu este egal cu 3; de asemenea,* F *și* S *nu pot fi întregi consecutivi. Atunci* X *este egal cu 2 sau 4, ceea ce, constatăm ușor, este imposibil, dacă* T *este mic sau egal cu 7. De aceea,* T *este egal cu 8,* R *egal cu 7 și* X *egal cu 4. Atunci* F *este 2 și* S *este egal cu 3, lăsînd pentru ultima literă rămasă,* Y, *valoarea 6.*

TABLA DE MATERII

Introducere

CARTEA ÎNTÎI

Capitolul 1	HEXAFLEXAGOANE	11
Capitolul 2	„MAGIE" CU O MATRICE	24
Capitolul 3	NOUĂ PROBLEME	31
Capitolul 4	TICKTACKTOE	44
Capitolul 5	PARADOXURI ALE PROBABILITĂȚII	53
Capitolul 6	JOCUL ICOSIAN ȘI TURNUL DIN HANOI	60
Capitolul 7	MODELE TOPOLOGICE CURIOASE	67
Capitolul 8	JOCUL HEX	75
Capitolul 9	SAM LOYD, CEL MAI MARE ENIGMIST AL AMERICII	84
Capitolul 10	TRUCURI MATEMATICE CU CĂRȚI DE JOC	94
Capitolul 11	MEMORIZAREA NUMERELOR	99
Capitolul 12	ALTE NOUĂ PROBLEME	106
Capitolul 13	POLIOMINOURI	120
Capitolul 14	SOFISME	135
Capitolul 15	NIM ȘI TAC TIX	144
Capitolul 16	STÎNG SAU DREPT?	154

CARTEA A DOUA

Capitolul 1	CELE CINCI SOLIDE PLATONICE	167
Capitolul 2	TETRAFLEXAGOANE	176
Capitolul 3	HENRY ERNEST DUDENEY, CEL MAI MARE ENIGMIST AL ANGLIEI	183

Capitolul 4	RĂDĂCINI CIFRICE	192
Capitolul 5	NOUĂ PROBLEME	199
Capitolul 6	CUBUL SOMA	212
Capitolul 7	TOPOLOGIE RECREATIVĂ	224
Capitolul 8	FI, RAPORTUL DE AUR	234
Capitolul 9	MAIMUȚA ȘI NUCILE DE COCOS	247
Capitolul 10	LABIRINTURI	254
Capitolul 11	LOGICĂ RECREATIVĂ	260
Capitolul 12	PĂTRATE MAGICE	269
Capitolul 13	JAMES HUGH RILEY SHOWS, INC.	279
Capitolul 14	ALTE NOUĂ PROBLEME	289
Capitolul 15	ELEUSIS, JOCUL INDUCTIV	300
Capitolul 16	ORIGAMI	307
Capitolul 17	ÎMPĂRȚIREA PĂTRATULUI ÎN PĂTRATE DIFERITE	317
Capitolul 18	JOCURI MECANICE	337
Capitolul 19	PROBABILITATE ȘI AMBIGUITATE	345
Capitolul 20	MISTERIOSUL DR. MATRIX	356